

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 2 maggio 1920.*

A. RÖRTI, Vicepresidente.

## MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Analisi. — *L'iterazione completa di  $x^2 - 2$* . Nota del Socio  
S. PINCHERLE.

Il problema dell'espressione, in forma esplicita, dell'iterata generale di una funzione di una variabile avente forma analitica determinata, non è risoluto, quando la funzione non sia la lineare, se non in un numero limitatissimo di casi. Perciò la trattazione della questione, anche su di un esempio specialissimo, non sembra oziosa: tanto più che in questo esempio, per circostanze particolarmente favorevoli di cui verrà data ragione in un prossimo lavoro di carattere più generale, la questione può essere condotta a fondo coi mezzi più elementari.

1. La funzione, di cui si vuole trovare l'iterata completa, è il semplice binomio

$$\alpha(x) = x^2 - 2;$$

con  $S_\alpha f(x)$ , o semplicemente  $Sf(x)$ , si indicherà la trasformazione per cui la variabile complessa  $x$  si sostituisce con  $\alpha(x)$ ;  $S^r$  sarà il corrispondente gruppo continuo di trasformazione, ad un parametro. Si vuole mostrare come sia possibile di dare, in modo semplice, l'espressione analitica di  $S^r$  per  $r$  qualunque.

2. Essendo  $x = u + iv$  un punto del piano-sfera  $x$ ,  $n$  un numero intero positivo, si porrà

$$S^n x = x_n, \quad S^{-n} x = (x'_n).$$

Qui  $x_n$  è un punto determinato,  $n^{\text{esimo}}$  conseguente di  $x$ ;  $(x'_n)$  è un sistema di  $2^n$  punti, antecedenti  $n^{\text{simi}}$  di  $x$ , e di cui uno, generico, verrà indicato con  $x'_n$ .

3. Dal piano-sfera  $x$ , si tolga il segmento dell'asse reale compreso fra  $-2$  e  $2$ , gli estremi inclusi; questo segmento verrà detto  $F$ . La porzione rimanente del piano-sfera si dirà  $\Omega$ ;  $\Omega$  è dunque un campo semplicemente connesso, contenente il punto all'infinito, aperto, e di cui  $F$  costituisce il contorno.

Posta l'equazione

$$(1) \quad \omega^2 - x\omega + 1 = 0,$$

questa dà origine ad un ramo di funzione analitica univocamente determinata in tutto  $\Omega$  dalla condizione di essere in modulo minore d'uno.  $\Omega$  viene con ciò ad essere uno dei due fogli della Riemanniana, escluso il taglio, rappresentativa della relazione (1). Indicando col segno  $-$ , apposto al radicale, che si tratta della radice di (1) minore in modulo dell'unità, il ramo di funzione in discorso è

$$(2) \quad \omega(x) = \frac{1}{2} (x - \sqrt{x^2 - 4}).$$

La  $\omega(x) = t$ , equivalente ad

$$(3) \quad x = t + \frac{1}{t},$$

dà la rappresentazione conforme del campo  $\Omega$  sull'interno del cerchio  $C$  del piano  $t$ , di centro nell'origine e raggio 1; al centro di  $C$  corrisponde il punto  $x = \infty$ ; ai cerchi  $|t| = \varrho$  di raggio crescente da 0 ad 1 (escluso) corrispondono le ellissi omofocali di fuochi  $\pm 2$

$$(4) \quad \frac{u^2}{\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right)^2} = 1,$$

di semiasse maggiore decrescente dall'infinito a 2 (escluso); queste ellissi si diranno  $E_\varrho$ , e  $\varrho$  ne sarà l'indice.

La  $\omega(x)$  è funzione analitica regolare per  $x = \infty$ , nulla di prim'ordine in quel punto, e sviluppabile, per  $|x| > 2$ , in serie della forma

$$\omega(x) = \frac{1}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \dots$$

4. Poichè dalle (3) si ricava

$$x^2 - 2 = t^2 + \frac{1}{t^2},$$



ne viene  $t^2 = \omega(\alpha(x))$ , cioè la  $\omega(x)$  verifica l'equazione funzionale

$$(5) \quad S_{\alpha} \omega(x) = \omega^2(x),$$

onde

$$(5') \quad S_{\alpha}^n \omega(x) = \omega^{2^n}(x)$$

per  $n$  intero, positivo o negativo, intendendosi che in questo ultimo caso il secondo membro dà  $2^n$  valori.

5. Per il n. 3, sull'ellisse  $E_{\varrho}$  è  $|\omega(y)| = \varrho$ , onde sarà per la (5')

$$|\omega(\alpha(x))| = \varrho^2;$$

se  $x$  è nella ellisse di indice  $\varrho$ ,  $x_1$  è dunque su quella di indice  $\varrho^2$ . « Il sistema delle ellissi  $E$ , e quindi la schiera delle coniche omofocali, ammette dunque la trasformazione  $S$  data da  $x_1 = x^2 - 2$ ; in altri termini, questa schiera costituisce un sistema di imprimitività per il gruppo  $S^n$  ».

6. Il fatto ora notato permette facilmente di indicare la distribuzione dei conseguenti e degli antecedenti dei punti di  $\Omega$  nel piano. Se  $x$  è uno di questi punti, e  $\varrho$  è l'indice dell'ellisse passante per  $x$ , i suoi successivi conseguenti saranno sulle ellissi di indici  $\varrho^2, \varrho^4, \dots, \varrho^{2^n}, \dots$  e, come si vede facilmente, le loro distanze dall'origine  $x = 0$  cresceranno in modo paragonabile ai termini di una progressione ultrageometrica

$$c, c^2, c^{2^2}, \dots, c^{2^n}, \dots$$

dove  $c$  è positivo e maggiore d'uno. In quanto agli antecedenti, i punti ( $x'_n$ )

sono sull'ellisse di indice  $\sqrt[n]{\varrho}$ , e per  $n = \infty$ , questa ellisse tende al segmento  $F$ ; « i punti limiti degli antecedenti sono dunque sul segmento che congiunge i fuochi ». Ma v'è di più: « Ogni punto di  $\Omega$  ha, come aggregato derivato dei suoi antecedenti, tutto quel segmento  $F$  ». Infatti, ad  $x$  la (3) fa corrispondere un punto  $t$  interno al cerchio  $C$ ; ai sistemi dei punti ( $x'_1$ ), ( $x'_2$ ), ... ( $x'_n$ ), ... corrisponderanno i sistemi di punti

$$(6) \quad \sqrt[n]{t}, \sqrt[n]{t}, \dots, \sqrt[n]{t}, \dots$$

i quali hanno come punti limiti tutti i punti della circonferenza  $C$ . Fissato arbitrariamente un punto  $e^{i\theta}$  su questa circonferenza, si può scegliere in ciascuno dei sistemi (6) un punto, rispettivamente  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  la cui successione tenda ad  $e^{i\theta}$ . Ma  $t_n$  avrà in  $\Omega$  il corrispondente

$$x'_n = t_n + \frac{1}{t_n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

e la successione degli  $x'_n$  tenderà a  $2 \cos \theta$ , che, per l'arbitrarietà di  $\theta$ , è un punto qualunque di  $F$ .

7. L'ultimo risultato ora indicato può enunciarsi nel seguente modo:  
 « Se con  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ , si rappresenta l'uno o l'altro dei due segni  $+ o -$ ,  
 « se  $x$  è un numero qualunque complesso, o reale maggiore di 2 o minore  
 « di  $-2$ , e se infine  $g$  è un numero reale arbitrario compreso fra  $-2$  e  $2$   
 « (inclusi), è sempre possibile di determinare la successione dei segni  $\varepsilon_1,$   
 «  $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$  in modo che la successione

$$\varepsilon_1 \sqrt{2+x}, \varepsilon_2 \sqrt{2+\varepsilon_1 \sqrt{2+x}}, \varepsilon_3 \sqrt{2+\varepsilon_2 \sqrt{2+\varepsilon_1 \sqrt{2+x}}}, \dots$$

« abbia per limite  $g$  ».

8. Dalla posizione  $\omega(x) = t$  risultando  $\omega(\alpha(x)) = t^2$ , ossia

$$\alpha(x) = t^2 + \frac{1}{t^2},$$

ne viene, per  $n$  intero positivo

$$\alpha_n(x) = t^{2^n} + t^{-2^n} = \omega^{2^n}(x) + \omega^{-2^n}(x),$$

cioè

$$(7) \quad \alpha_n(x) = \left( \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2} \right)^{2^n} + \left( \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} \right)^{2^n}.$$

Questa formula, conseguenza della (5) per  $n$  intero e positivo, dà la *definizione* dell'iterata generale di  $x^2 - 2$  per indice di iterazione  $n$  qualsivoglia. A giustificare questa definizione, basta osservare che da essa si deduce immediatamente la legge degli indici

$$\alpha_m(\alpha_n(x)) = \alpha_{m+n}(x)$$

per  $m, n$  qualsivogliano. La (7) dà dunque l'espressione analitica del gruppo  $S^n$  continuo.

9. L'equazione di Schroeder

$$S_\alpha f(x) = k f(x),$$

ha, per  $\alpha(x) = x^2 - 2$ , soluzione per il solo valore  $k = 2$ , e questa soluzione, all'infuori d'un moltiplicatore costante arbitrario, è data da  $\log \omega(x)$ . In corrispondenza, è  $\log \log \omega(x)$  la soluzione della equazione di Abel.

10. Per i valori  $\nu = 1, 2, 3, \dots$ , le espressioni

$$\omega^\nu(x) + \omega^{-\nu}(x)$$

o somme delle potenze simili delle radici della equazione (1), sono i noti polinomi  $V_\nu(x)$ , con  $V_0 = 2$ ,  $V_1 = x$ , classici nell'algebra e nella moltiplicazione degli archi (<sup>1</sup>), legati dalla relazione ricorrente

$$(8) \quad V_\nu - x V_{\nu-1} + V_{\nu-2} = 0.$$

(<sup>1</sup>) V. p. es. Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, tom. I, pag. 138 e seg.; pag. 235 e seg. (Paris, Gauthier-Villars, 4<sup>me</sup> éd., 1877).



Or bene, risulta da quanto precede, e precisamente dalla (7), il fatto notevole che codesti polinomi sono iterate (per indice generalmente non razionale) della funzione  $x^2 - 2$ ; precisamente,  $V_\nu = \alpha_r(x)$ , dove  $r$  è il logaritmo di  $\nu$  in base 2.

Ne risulta, per i polinomi  $V_\nu$ , la proprietà che non credo sia stata avvertita:

$$(9) \quad V_\mu(V_\nu) = V_{\mu\nu}.$$

Inoltre, poichè la schiera delle coniche omofocali di fuochi  $\pm 2$  è trasformata in sè dalla sostituzione  $x_1 = x^2 - 2$ , essa lo è pure da ogni sostituzione  $x_1 = V_\nu(x)$ , per essere questa una iterata — sebbene di indice generalmente non razionale — della  $x^2 - 2$ .

Come si è avvertito, la questione trattata in questa breve Nota ha carattere assai elementare. Tuttavia, essa non sembra priva d'interesse, per il fatto che un noto sistema di polinomi si presenta come formato da iterate ad indice non intero di uno di essi, ma più ancora perchè mentre una questione analoga si può risolvere per l'iterazione di un polinomio intero  $\alpha(x)$  qualunque, la soluzione ha indole trascendente di grado elevato, e solo per condizioni specialissime si abbassa ad avere carattere algebrico elementare, come nel caso di

$$\alpha(x) = x^2 - 2.$$

**Matematica.** — *Su alcune altre formole d'inversione collegate col metodo d'integrazione di Riemann.* Nota del Corrispondente O. TEDONE.

# I.

1. Il desiderio di dare forma definitiva, o, almeno, di apportare un contributo di qualche importanza alle soluzioni di alcuni problemi di meccanica che dipendono da equazioni a derivate parziali del tipo di Eulero e di Poisson, e, in particolar modo, alla soluzione del notevolissimo problema di Riemann, del moto di un fluido elastico per onde piane di ampiezza finita, mi ha condotto alle ricerche preliminari che mi permetto di esporre in questa Nota.

Le questioni, a cui il metodo di Riemann propriamente detto, si può applicare, fanno intervenire, ordinariamente, il tempo ed una sola coordinata spaziale. Ed è stato a proposito, appunto, del problema citato che Riemann ha esposto il suo metodo d'integrazione. Devesi però notare che, quando si tratta di applicare il metodo di Riemann a problemi concreti di meccanica

o di fisica-matematica, le formole a cui questo metodo immediatamente conduce, sono atte, senz'altro, a risolvere i problemi stessi, solo se, fra i dati accessori di essi, non vi sieno che condizioni iniziali, ed i fenomeni da questi problemi interpretati si possano considerare come esistenti in tutto uno spazio indefinito ad una dimensione. Quando, al contrario, uno di questi problemi si complica per la presenza di condizioni ai limiti pel fatto che il problema si riferisce ad un fenomeno che avviene, o si considera, solo in una porzione limitata del detto spazio, allora la formola di integrazione di Riemann può ancora portare alla soluzione completa del problema solo se sappiamo anche risolvere certe equazioni integrali di Volterra che il problema stesso è capace subito di indicarci.

In questa Nota ci occuperemo principalmente di equazioni integrali che si incontrano nel problema considerato da Riemann ed in problemi analoghi.

2. Per raggiungere il nostro scopo, ci fonderemo su osservazioni e procedimenti già sfruttati a proposito di un'altra questione <sup>(1)</sup> che potrebbe, del resto, considerarsi come facente tutto un corpo con quella di cui iniziamo lo studio. E, come punto di partenza delle presenti ricerche, prenderemo l'equazione di Eulero e di Poisson con invarianti eguali sotto la forma

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\lambda(\lambda + 1)}{\xi^2} u = 0,$$

ovvero sotto l'altra

$$(1') \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \tau'} + \frac{\lambda(\lambda + 1)}{(\tau - \tau')^2} u = 0$$

con

$$(2) \quad \tau = \eta + \xi, \quad \tau' = \eta - \xi,$$

$\lambda$  essendo una costante perfettamente arbitraria. Questa equazione gode della proprietà di essere aggiunta di se stessa e dell'altra, di trasformarsi in se stessa eseguendo su  $\tau$  e  $\tau'$  una medesima trasformazione lineare, intera o fratta. Quest'ultima proprietà è solo un caso particolare di un'altra di cui gode l'equazione più generale del tipo di Eulero e di Poisson

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \tau'} - \frac{\lambda'}{\tau - \tau'} \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\lambda}{\tau - \tau'} \frac{\partial u}{\partial \tau'} - \frac{p}{(\tau - \tau')^2} u = 0,$$

$\lambda$ ,  $\lambda'$  e  $p$  essendo tre costanti qualunque, e che si dimostra, senza difficoltà, con calcolo diretto. Per la proprietà di cui parliamo, se si opera nella (3) la trasformazione

$$(4) \quad \tau = \frac{a\tau_1 + b}{c\tau_1 + d}, \quad \tau' = \frac{a\tau'_1 + b}{c\tau'_1 + d},$$

<sup>(1)</sup> Su alcune equazioni integrali di Volterra ecc. Questi Rendic., seduta 1° febbraio 1914.



con  $a, b, c, d$  costanti qualunque, e, nello stesso tempo, si pone

$$(5) \quad U = (c\tau_1 + d)^{-\lambda} (c\tau'_1 + d)^{-\lambda'} u \left[ \frac{a\tau_1 + b}{c\tau_1 + d}, \frac{a\tau'_1 + b}{c\tau'_1 + d} \right],$$

$U$ , come funzione di  $\tau_1$  e di  $\tau'_1$ , soddisfa alla stessa equazione (3) alla quale soddisfa  $u$  come funzione di  $\tau$  e di  $\tau'$  (1).

Moltiplicando la funzione  $u$  per una conveniente potenza di  $\tau - \tau'$ , si trasforma la (3) in un'altra equazione dello stesso tipo in cui il nuovo  $p$  è zero. L'equazione (3), quando in essa si supponga  $p = 0$ , è indicata dal Darboux col simbolo  $E(\lambda, \lambda')$ , mentre una soluzione qualunque di questa equazione è indicata dallo stesso autore col simbolo  $Z(\lambda, \lambda')$ . Si mostra allora subito che

$$(6) \quad \frac{\partial Z(\lambda, \lambda')}{\partial \tau} = Z(\lambda + 1, \lambda') \quad , \quad \frac{\partial Z(\lambda, \lambda')}{\partial \tau'} = Z(\lambda, \lambda' + 1)$$

la prima delle quali, p. es., vuol dire esattamente che la derivata di  $Z(\lambda, \lambda')$  rispetto a  $\tau$ , soddisfa alla equazione  $E(\lambda + 1, \lambda')$ .

3. Ricordiamo ora che il metodo di Riemann per risolvere il problema di Cauchy (concetto che precisa meglio quello vago di integrazione) per la equazione (1) è fondato sull'osservazione che, se  $u$  e  $z$  sono due soluzioni distinte di essa e poniamo

$$(7) \quad U = u \frac{\partial z}{\partial \eta} - z \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad , \quad V = u \frac{\partial z}{\partial \xi} - z \frac{\partial u}{\partial \xi},$$

l'espressione

$$U d\xi + V d\eta$$

è un differenziale esatto. Per cui, per ogni contorno  $c$  regolare, chiuso, racchiudente un'area, all'interno della quale, contorno compreso, le funzioni  $u$  e  $z$  sieno regolari, è

$$(8) \quad \int_c (U d\xi + V d\eta) = 0.$$

Con l'aiuto della (8), se su di una linea  $s$  non intrecciata, aperta e regolare, sono assegnati i valori che si vuole acquistino su  $s$  una soluzione  $u$  della (1) e quelli delle sue derivate, in modo arbitrario ma compatibile, si può, spesso, con facilità, costruire il valore di  $u$  in un punto  $(x, y)$  fuori di  $s$  [problema di Cauchy per l'equazione (1)]. Basta applicare la (8) al

(1) Una dimostrazione di questa proposizione, valevole nel caso di  $p = 0$  e dovuta all'Appell, è riportata dal Darboux nelle sue *Leçons sur la théorie des surfaces*, deuxième partie, pag. 58, n. 349. La proposizione stessa è dovuta al Darboux nel caso particolare in cui l'equazione ha la forma (1'); per il qual caso l'autore, nel luogo citato, dà una rapida dimostrazione.

contorno chiuso formato da  $s$  e dalle due caratteristiche della equazione (1) uscenti dal punto  $(x, y)$

$$(9) \quad \xi - x - (\eta - y) = 0, \quad \xi - x + \eta - y = 0$$

quando per  $z$  si assuma la funzione di Riemann relativa alla stessa equazione (1) ed al punto  $(x, y)$ , cioè la soluzione di (1) regolare nell'intorno del punto  $(x, y)$  e che sulle due caratteristiche precedenti assume il valore uno. Se  $z$  è regolare in tutto il campo indicato, chiamando 1 e 2 i due punti d'incontro di  $s$  con le due rette (9) nell'ordine in cui le loro equazioni sono scritte, si trova così la formola di Riemann

$$(10) \quad 2u(x, y) = u_1 + u_2 - \int_1^2 (U d\xi + V d\eta),$$

l'integrale essendo esteso al pezzo di linea  $s$  compreso fra i punti 1 e 2.

4. Con l'aiuto della (10), la risoluzione del problema di Cauchy per la equazione (1) è ridotto alla ricerca della funzione di Riemann corrispondente. A questo scopo, posto

$$(11) \quad \kappa = \frac{(\eta - y)^2 - (\xi - x)^2}{4\xi x},$$

notiamo che  $\kappa$  si annulla sulle due caratteristiche uscenti dal punto  $(x, y)$  e che la (1) ammette soluzioni funzioni di  $\kappa$  soltanto, le quali non sono altro che le soluzioni dell'equazione ipergeometrica

$$(12) \quad \kappa(1 - \kappa) \frac{d^2 z}{d\kappa^2} + (1 - 2\kappa) \frac{dz}{d\kappa} + \lambda(\lambda + 1)z = 0.$$

Per la nostra funzione di Riemann potremo quindi adottare la soluzione della (12), regolare nell'intorno di  $\kappa = 0$  e che per  $\kappa = 0$  si riduce ad uno.

Occorre distinguere vari casi. Per  $\lambda = 0$  e  $\lambda = -1$  è semplicemente  $z = 1$ .

Del resto, qualunque sia  $\lambda$ , si può sempre porre la funzione di Riemann sotto la forma di una serie ipergeometrica

$$(13) \quad z = F(-\lambda, \lambda + 1, 1, \kappa)$$

la quale si riduce, appunto, ad uno per  $\lambda = 0$  e  $\lambda = -1$ , e, per  $\lambda$  eguale ad un numero intero positivo o negativo, si riduce ad un polinomio in  $\kappa$ . Per ogni altro valore di  $\lambda$ , affinchè si possa dare alla funzione di Riemann l'espressione (13), occorre che, per ogni fissato punto  $(x, y)$ , il campo di variabilità di  $\xi$  e  $\eta$ , che cade nelle nostre considerazioni, sia tale che in esso sia  $|\kappa| < 1$ . In ogni caso, in questo campo, dev'essere  $\xi \neq 0$ .

In quei casi particolari in cui

$$-1 < \lambda < 0,$$



la funzione  $z$  si può assumere sotto la forma di un integrale definito

$$(14) \quad z = \frac{1}{\Gamma(\lambda) \Gamma(-\lambda-1)} \int_0^1 s^\lambda (1-s)^{-\lambda-1} (1-sx)^\lambda ds.$$

In quest'ultima ipotesi, si ha nella (14) una espressione analitica che conserva un significato per ogni valore finito di  $x$ , tranne per il valore  $x=1$ , per il quale la funzione  $z$  diventa infinita. Fissato quindi il punto  $(x, y)$ , perchè la formola di Riemann sia applicabile, occorre soltanto che il campo di variabilità di  $\xi$  e  $\eta$  non sia attraversato, o toccato, nè dalla retta  $\xi=0$ , nè dalla linea  $x=1$ ; la quale ultima linea è formata dalle due caratteristiche della (1) uscenti dal punto  $(-x, y)$  simmetrico di  $(x, y)$  rispetto all'asse  $y$ .

## II.

5. Supponiamo, ora, che la linea  $s$  sia formata dalla porzione dell'asse  $\xi$  sulla quale  $\xi \geq 1$  (invece di  $\xi \geq 1$  si potrebbe supporre, più generalmente,  $\xi \geq a$  con  $a$  costante positiva qualunque) e dalla porzione della retta  $\xi=1$  sulla quale  $\eta \geq 0$ , e che il punto  $(x, y)$  si trovi nel quadrante  $x \geq 1$ ,  $y \geq 0$ . Supporremo, inoltre, principalmente, che la formola di Riemann sia da applicarsi in quella delle quattro regioni in cui le due caratteristiche della equazione (1), uscenti dal punto  $(x, y)$ , dividono il precedente quadrante, che è, insieme, tutta al finito ed attraversata dalla retta  $\eta=y$ . Se indichiamo allora con  $f(\xi)$ ,  $f_1(\xi)$ , rispettivamente, i valori che  $u$  e  $\frac{\partial u}{\partial \eta}$  si vuole che assumano sull'asse  $\xi$ ; se, analogamente, indichiamo con  $\varphi(\eta)$ ,  $\varphi_1(\eta)$  i valori che  $u$  e  $\frac{\partial u}{\partial \xi}$  devono assumere sulla retta  $\xi=1$ , potremo scrivere subito le due formole che seguono e che valgono, la prima per  $y > x-1$ , la seconda per  $y < x-1$ :

$$(15) \quad 2u(x, y) = \varphi(y-x+1) + \varphi(y+x-1) - \\ - \int_{y-x+1}^{y+x-1} \left[ \varphi(\eta) \frac{\partial z}{\partial \xi} - \varphi_1(\eta) z \right]_{\xi=1} d\eta,$$

$$(16) \quad 2u(x, y) = f(x-y) + \varphi(x+y-1) + \\ + \int_1^{x-y} \left[ f(\xi) \frac{\partial z}{\partial \eta} - f_1(\xi) z \right]_{\eta=0} d\xi - \int_0^{x+y-1} \left[ \varphi(\eta) \frac{\partial z}{\partial \xi} - \varphi_1(\eta) z \right]_{\xi=1} d\eta.$$

Per  $y=x-1$  le due formole precedenti danno, per  $u$ , gli stessi valori tenendo conto delle condizioni

$$(17) \quad \varphi(0) = f(1), \quad \varphi'(0) = f_1(1), \quad \varphi_1(0) = f'(1)$$

che, naturalmente, devono essere verificate. E sarebbe facile dimostrare che, allora, anche le derivate prime di  $u$ , rispetto ad  $x$  e ad  $y$ , ricavate dalla (15) e dalla (16), sono continue lungo la stessa retta  $y = x - 1$ ; mentre questo cessa di essere vero per le derivate seconde e per le successive. Sicchè la (15) e la (16) devono considerarsi come due soluzioni effettivamente distinte della (1) che si saldano lungo la caratteristica della stessa equazione,  $y = x - 1$ .

Dalla (15), e dalla formola che si ottiene derivando la stessa (15) rispetto ad  $x$ , si ricava subito che  $u$  e  $\frac{\partial u}{\partial x}$  tendono, per  $x = 1$ , effettivamente ai valori ad essi assegnati,  $\varphi$  e  $\varphi_1$ . Invece, dalla (16) e dalla

$$\begin{aligned} (18) \quad 2 \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = & -f'(x-y) + \varphi'(x+y-1) - \\ & - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} \frac{y}{x(x-y)} f(x-y) + f_1(x-y) + \\ & + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} \frac{x-1}{x} \varphi(x+y-1) + \varphi_1(x+y-1) - \\ & - \int_1^{x-y} \left[ f(\xi) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + f_1(\xi) \frac{\partial z}{\partial y} \right]_{\eta=0} d\xi - \\ & - \int_0^{x+y-1} \left[ \varphi(\eta) \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial y} - \varphi_1(\eta) \frac{\partial z}{\partial y} \right]_{\xi=1} d\eta \end{aligned}$$

che si ottiene derivando la (16) rispetto ad  $y$ , si deduce che, se si vuole che anche  $u$  e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  convergano sull'asse  $\xi$  ai valori  $f(x)$ ,  $f_1(x)$  ad esse assegnati, occorre che  $f$  ed  $f_1$  sieno legate a  $\varphi$  e  $\varphi_1$  dalle relazioni integrali

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = & \varphi(x-1) - \int_1^x f_1(\xi) z_{\eta=y=0} d\xi - \\ & - \int_0^{x-1} \left[ \varphi(\eta) \frac{\partial z}{\partial \xi} - \varphi_1(\eta) z \right]_{\xi=1, y=0} d\eta, \\ f_1(x) = & -f'(x) + \varphi'(x-1) + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} \frac{x-1}{x} \varphi(x-1) + \varphi_1(x-1) - \\ & - \int_1^x f(\xi) \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{\eta=y=0} d\xi - \int_0^{x-1} \left[ \varphi(\eta) \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial y} - \varphi_1(\eta) \frac{\partial z}{\partial y} \right]_{\xi=1, y=0} d\eta. \end{aligned} \right.$$

La prima di queste equazioni determina la funzione  $f(x)$  se è data, oltre a  $\varphi$  e  $\varphi_1$ , anche  $f_1(x)$ ; la seconda, invece, determina  $f_1$  se, oltre a  $\varphi$



e  $\varphi_1$ , è data  $f$ . Ma è noto che, assegnate  $\varphi$  e  $\varphi_1$ , delle due funzioni  $f$  ed  $f_1$ , una sola si può dare ad arbitrio e che, allora, la soluzione della (1) è determinata e si può costruire; le due equazioni (19) devono, dunque, ridursi una all'altra. Possiamo, quindi, data  $f$  o  $f_1$ , determinare  $f_1$  o  $f$ , dall'una o dall'altra delle (19). Se, in particolare, supponiamo che sia identicamente  $\varphi = \varphi_1 = 0$ , per le (17) dev'essere

$$(17') \quad f(1) = 0 \quad , \quad f_1(1) = 0 \quad , \quad f'(1) = 0 ,$$

e le (19) ci danno

$$(I) \quad \int_1^x f_1(\xi) F \left[ -\lambda, \lambda + 1, 1, -\frac{(\xi - x)^2}{4\xi x} \right] d\xi = -f(x),$$

$$f_1(x) = -f'(x) - \int_1^x f(\xi) F' \left[ -\lambda, \lambda + 1, 1, -\frac{(\xi - x)^2}{4\xi x} \right] \frac{d\xi}{2x\xi} .$$

In queste formole abbiamo espresso  $z$  per mezzo della corrispondente funzione ipergeometrica, ed  $F'$  indica la derivata di  $F$  rispetto al quarto argomento. La prima delle (I) è un'equazione integrale di cui la seconda dà la soluzione.

6. Se teniamo presente che, delle quattro funzioni  $\varphi, \varphi_1, f, f_1$ , si possono dare ad arbitrio tre qualunque di esse, sorge la questione più generale di determinare allora la quarta dall'una o dall'altra delle (19). Quando l'incognita è  $\varphi$  o  $\varphi_1$ , questa si può determinare risolvendo un'equazione integrale che ci può essere offerta, indifferentemente, dall'una, o dall'altra, delle (19). È però da notare che  $\varphi$  e  $\varphi_1$  soddisfano anche ad altre equazioni integrali che sono da preferirsi alle prime quando si tratti di determinare una di queste due funzioni. Per determinare queste nuove equazioni, applichiamo la formola di Riemann, invece che nella regione finita del solito quadrante attraversata dalla retta  $\eta = y$ , in quella che è pure finita ed attraversata dalla retta  $\xi = x$ . Le due espressioni analitiche che ci danno allora la soluzione richiesta della equazione (1), sono tali che, per  $y = 0$ ,  $u$  e  $\frac{\partial u}{\partial y}$  tendono effettivamente ad  $f$  ed  $f_1$ ; mentre, affinché  $u$  e  $\frac{\partial u}{\partial x}$  tendano a  $\varphi$  e  $\varphi_1$ , per  $x = 1$ , devono essere soddisfatte due condizioni che si trovano in modo analogo al precedente, e sulle quali si possono pur fare considerazioni analoghe a quelle precedentemente fatte. Di queste condizioni scriveremo soltanto la prima.

$$(20) \quad \varphi(y) = f(y+1) - \int_1^{y+1} \left[ f(\xi) \frac{\partial z}{\partial \eta} - f_1(\xi) z \right]_{\eta=0, \alpha=1} d\xi +$$

$$+ \int_0^y \left[ \varphi(\eta) \frac{\partial z}{\partial \xi} - \varphi_1(\eta) z \right]_{\xi=x=1} d\eta .$$

Questa equazione (e analoghe conclusioni si ricaverebbero dall'altra condizione che dev'essere verificata fra le funzioni  $f$ ,  $f_1$ ,  $\varphi$  e  $\varphi_1$  e che non abbiamo scritta) mostra che, se sono date  $f$ ,  $f_1$  e  $\varphi_1$ , la funzione  $\varphi$  si può ottenere risolvendo un'equazione della forma

$$(21) \quad \varphi(y) + \int_0^y \varphi(\eta) F' \left[ -\lambda, \lambda + 1, 1, \frac{(y - \eta)^2}{4} \right] \frac{(y - \eta)^2}{4} d\eta = \Phi(y),$$

mentre, se sono assegnate  $f$ ,  $f_1$  e  $\varphi$ , la funzione  $\varphi_1$  può determinarsi come soluzione di un'equazione della forma

$$(22) \quad \int_0^y \varphi_1(\eta) F \left[ -\lambda, \lambda + 1, 1, \frac{(y - \eta)^2}{4} \right] d\eta = \Psi(y),$$

le funzioni  $\Phi$  e  $\Psi$  essendo funzioni note.

I casi più semplici che possono presentarsi sono quelli in cui  $\lambda$  è un numero intero positivo o negativo, nei quali casi il nucleo di ciascuna delle equazioni precedenti è un polinomio intero in  $y - \eta$ . Con un numero sufficientemente grande di derivazioni, la determinazione di  $\varphi$  e di  $\varphi_1$  si riporta alla integrazione di un'equazione lineare a coefficienti costanti. Nei casi più generali si dovrà ricorrere alla teoria generale che, per la forma speciale dei nuclei precedenti, è abbastanza semplice e nota.

### III.

7. Le nostre considerazioni ci hanno fatto scoprire un'equazione integrale di Volterra la cui risoluzione si ottiene con semplici operazioni di derivazione e di integrazione, cioè quella contenuta nella prima delle (I). Vi sono altre equazioni della stessa natura che godono di analoghe proprietà. Per lo studio di queste nuove equazioni occorre tener presenti le relazioni che legano la derivata di una serie ipergeometrica, rispetto al suo quarto argomento, con le serie ipergeometriche contigue ad essa: con quelle serie ipergeometriche, cioè, che si ottengono dalla prima aumentando, o diminuendo, di un'unità uno dei primi tre parametri da cui la serie ipergeometrica pure dipende. L'insieme di tutte queste relazioni si ottiene sistematicamente ricordando che un'equazione  $E(\lambda, \lambda')$  ammette soluzioni omogenee in  $\tau$  e  $\tau'$  della forma

$$\tau^m \varphi(t) \quad , \quad t = \frac{\tau'}{\tau} ,$$

la funzione  $\varphi(t)$  essendo una soluzione della equazione ipergeometrica

$$(23) \quad t(1-t) \varphi''(t) + [1-m-\lambda-(1-m+\lambda')t] \varphi'(t) + m\lambda' \varphi(t) = 0 ,$$

ed applicando a queste soluzioni le proprietà espresse dalle (6). Delle solu-



zioni dell'equazione  $E(\lambda, \lambda')$  della natura indicata basta tener conto delle seguenti:

$$(24) \quad \begin{cases} t^m F(-m, \lambda', 1-m-\lambda, t), \\ t^m t^{m+\lambda} F(\lambda, \lambda + \lambda' + m, 1+m+\lambda, t), \\ t^m (1-t)^{1-\lambda-\lambda'} F(1-m-\lambda-\lambda', 1-\lambda, 1-m-\lambda, t), \\ t^m t^{m+\lambda} (1-t)^{1-\lambda-\lambda'} F(1-\lambda', 1+m, 1+m+\lambda, t). \end{cases}$$

E si noti che le funzioni ipergeometriche che compaiono nelle (24) dipendono da tre costanti arbitrarie,  $m, \lambda, \lambda'$ , le quali si possono determinare sempre in modo che i tre primi parametri, da cui ogni serie ipergeometrica dipende, acquistino valori dati  $\alpha, \beta, \gamma$ . Se indichiamo ora con  $F$  una serie ipergeometrica della variabile  $t$  costruita con i primi tre parametri  $\alpha, \beta, \gamma$ , e, se indichiamo con  $F_{\alpha+}, F_{\alpha-}, F_{\gamma+}, F_{\gamma-}$  le serie ipergeometriche che si ottengono da  $F$  aumentando, o diminuendo, di un'unità i parametri  $\alpha$  e  $\gamma$ , le relazioni accennate si scrivono

$$(25) \quad \begin{cases} \alpha F + t F' = \alpha F_{\alpha+}, \\ (\gamma - 1) F + t F' = (\gamma - 1) F_{\gamma-}, \\ \gamma(\gamma - \alpha - \beta) F + \gamma(1-t) F' = (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) F_{\gamma+}, \\ (\alpha - \gamma + \beta t) F - t(1-t) F' = (\alpha - \gamma) F_{\alpha-}. \end{cases}$$

Le serie ipergeometriche che compaiono nella nostra quistione sono tali che, per esse,  $\alpha + \beta = 1, \alpha = -\lambda$ . Se indichiamo con  $F_\gamma(t)$  quella di tali serie in cui  $\gamma$  è il terzo parametro e  $t$  la variabile, in conseguenza della terza delle (25), potremo scrivere la relazione

$$(25') \quad (1-t) F_1'(t) = -\lambda(\lambda+1) F_2(t).$$

8. Conviene anche notare che la coesistenza delle due equazioni (I) richiede che sia

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\xi}^x F_1 \left[ -\frac{(\xi - \xi_1)^2}{4\xi\xi_1} \right] F_1' \left[ -\frac{(\xi_1 - x)^2}{4\xi_1 x} \right] \frac{d\xi_1}{\xi_1} = \\ = -x \frac{\partial}{\partial x} F_1 \left[ -\frac{(x - \xi)^2}{4x\xi} \right] = \xi \frac{\partial}{\partial \xi} F_1 \left[ -\frac{(x - \xi)^2}{4x\xi} \right], \end{aligned}$$

formola che è solo un caso particolare di un'altra alla quale, in questa Nota, ci contenteremo di accennare.

IV.

9. In questa Nota vogliamo ancora soltanto servirci dei risultati precedenti per trovare la soluzione dell'equazione integrale

$$(II) \quad \int_1^x f(\xi) F_2(\sigma) \frac{d\xi}{(x+\xi)^2} = -\frac{1}{2\lambda(\lambda+1)} \Phi(x) \quad , \quad \sigma = -\frac{(x-\xi)^2}{4x\xi}$$

che incontreremo nel seguito delle nostre ricerche e nella quale  $\Phi(x)$  è una funzione data che, naturalmente, si annulla per  $x=1$ .

L'equazione (II), a causa della (25'), si può scrivere

$$(II') \quad \int_1^x f(\xi) F_1'(\sigma) \frac{d\xi}{2x\xi} = \Phi(x) .$$

E, per determinare  $f(x)$  da questa equazione, cambiamo, in essa,  $x$  in  $\xi_1$ , quindi moltiplichiamola per  $F_1 \left[ -\frac{(x-\xi_1)^2}{4x\xi_1} \right]$  ed integriamo, poi, rispetto a  $\xi_1$ , da 1 ad  $x$ . Tenendo conto della (26), si ricavano subito le due relazioni

$$(27) \quad \begin{cases} \int_1^x \frac{f(\xi)}{\xi} \frac{\partial}{\partial x} F_1(\sigma) d\xi = \frac{1}{x} \int_1^x \Phi(\xi) F_1(\sigma) d\xi , \\ \int_1^x f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} F_1(\sigma) d\xi = \int_1^x \frac{f(\xi)}{\xi} F_1'(\sigma) \frac{x^2 - \xi^2}{4x\xi} d\xi = - \int_1^x \Phi(\xi) F_1(\sigma) d\xi . \end{cases}$$

Da queste se ne ricavano altre due integrando la prima, rispetto ad  $x$ , da 1 ad  $x$ , ed eseguendo sulla seconda l'operazione  $D = x \frac{\partial}{\partial x}$ : vogliam dire le due equazioni

$$(28) \quad \begin{cases} \int_1^x \frac{f(\xi)}{\xi} F_1(\sigma) d\xi - \bar{f}(x) = \int_1^x \frac{d\xi_1}{\xi_1} \int_1^{\xi_1} \Phi(\xi) F_1 \left[ -\frac{(\xi_1 - \xi)^2}{4\xi_1\xi} \right] d\xi , \\ \int_1^x \frac{f(\xi)}{\xi} \left\{ \sigma(1-\sigma) F_1''(\sigma) + \frac{1}{2}(1-2\sigma) F_1'(\sigma) \right\} d\xi = -D \int_1^x \Phi(\xi) F_1(\sigma) d\xi \end{cases}$$

in cui si è posto

$$(28') \quad \bar{f}(\xi) = \int_1^x \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi .$$



L'ultima delle (28), a causa della prima di esse e dell'equazione differenziale a cui soddisfa  $F_1(\sigma)$ , dà luogo all'altra

$$(29) \quad \int_1^x \frac{f(\xi)}{\xi} F_1'(\sigma) \frac{x^2 + \xi^2}{4x\xi} d\xi = -\lambda(\lambda + 1) \bar{f}(x) - \\ - \lambda(\lambda + 1) \int_1^x \frac{d\xi_1}{\xi_1} \int_1^{\xi_1} \Phi(\xi) F_1 \left[ -\frac{(\xi_1 - \xi)^2}{4\xi_1\xi} \right] d\xi + D \int_1^x \Phi(\xi) F_1(\sigma) d\xi.$$

Da questa equazione e dalla seconda delle (27), sommando e sottraendo, si ricavano ancora le due equazioni seguenti:

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} x^2 \int_1^x \frac{f(\xi)}{\xi} F_1'(\sigma) \frac{d\xi}{2x\xi} &= -\lambda(\lambda + 1) \bar{f}(x) - \\ &- \lambda(\lambda + 1) \int_1^x \frac{d\xi_1}{\xi_1} \int_1^{\xi_1} \Phi(\xi) F_1 \left[ -\frac{(\xi_1 - \xi)^2}{4\xi_1\xi} \right] d\xi + \\ &+ (D - 1) \int_1^x \Phi(\xi) F_1(\sigma) d\xi, \\ \int_1^x \xi f(\xi) F_1'(\sigma) \frac{d\xi}{2x\xi} &= -\lambda(\lambda + 1) \bar{f}(x) + \Phi_1(x), \end{aligned} \right.$$

convenendo di porre, per comodità e brevità,

$$(30') \quad \Phi_1(x) = -\lambda(\lambda + 1) \int_1^x \frac{d\xi_1}{\xi_1} \int_1^{\xi_1} \Phi(\xi) F_1 \left[ -\frac{(\xi_1 - \xi)^2}{4\xi_1\xi} \right] d\xi + \\ + (D + 1) \int_1^x \Phi(\xi) F_1(\sigma) d\xi.$$

L'ultima delle (30) ha la stessa forma della (II'), salvo per l'espressione del secondo membro e perchè, nel primo, vi compare  $\xi f(\xi)$  al posto di  $f(\xi)$ . Partendo, dunque, dalla seconda delle (30), si potranno ricavare due nuove equazioni le quali staranno ad essa nella stessa relazione in cui la prima delle (28) e la prima delle (30) stanno con la (II'). Queste due equazioni si possono scrivere subito. Ed eseguendo, su ciascuna di esse, l'operazione  $D$ ; quindi servendoci, per la prima, della identità

$$(31) \quad (D - 1) \int_1^x \bar{f}(\xi) F_1(\sigma) d\xi = \int_1^x f(\xi) F_1(\sigma) d\xi,$$

e, per la seconda, della (II'), esse potranno porsi sotto la forma

$$(32) \left\{ \begin{aligned} & [D(D-1) + \lambda(\lambda+1)] \int_1^\infty \bar{f}(\xi) F_1(\sigma) d\xi - \\ & \qquad \qquad \qquad - xf(x) = \int_1^\infty \Phi_1(\xi) F_1(\sigma) d\xi, \\ & [D(D-1) - \lambda(\lambda+1)] \int_1^\infty \bar{f}(\xi) F_1(\sigma) d\xi + \\ & \qquad \qquad \qquad + xf(x) = -\frac{1}{\lambda(\lambda+1)} D[x^2 \Phi(x)] + \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} [D(D-1) - \lambda(\lambda+1)] \int_1^\infty \Phi_1(\xi) F_1(\sigma) d\xi. \end{aligned} \right.$$

Eseguendo sulla prima l'operazione  $D(D-1) - \lambda(\lambda+1)$ , sulla seconda l'operazione  $D(D-1) + \lambda(\lambda+1)$ ; quindi, sottraendo la prima dalla seconda, si trova

$$(III) \quad \begin{aligned} 2\lambda(\lambda+1) xf(x) &= [D(D-1) - \lambda(\lambda+1)] \int_1^\infty \Phi_1(\xi) F_1(\sigma) d\xi - \\ &- [D(D-1) + \lambda(\lambda+1)] \left[ x \int_1^\infty \Phi(\xi) d\xi \right] - \\ &- 4 [4 \Phi'(1) + \Phi''(1)] (x-1) - 4 \Phi'(1). \end{aligned}$$

Mineralogia. — *Blödite ed altri minerali del giacimento salifero di monte Sambuco in territorio di Calascibetta (Sicilia).*  
Nota del Corrisp. F. MILLOSEVICH.

Campioni del minerale del nuovo giacimento salifero esplorato da circa un paio d'anni in regione monte Sambuco, nel territorio di Calascibetta (prov. di Caltanissetta), mi furono recentemente dati in esame dal prof. E. Paternò, cui mi è grato porgere i dovuti ringraziamenti per avermi in tal modo offerto occasione di compiere le osservazioni che intendo riassumere in questa ed eventualmente in altre note.

Non avendo osservato sul luogo il giacimento, mi astengo dal darne una descrizione e mi limito ad alcuni particolari, di puro interesse mineralogico.

La massa salifera che si trova nelle argille, di età tortoniana secondo alcuni, o più recenti secondo altri geologi (<sup>1</sup>), fu esplorata sino ad ora con tre gallerie a diverso livello, sempre sullo stesso versante meridionale del monte Sambuco. La galleria superiore taglia un deposito di una specie di

(<sup>1</sup>) Vedi: Seguenza L., *I giacimenti di salgemma in Sicilia e la loro età geologica* (R. Acc. peloritana, Messina, 19, 1905); Cruciani A., *Contributo allo studio geologico dei giacimenti di salgemma della Sicilia* (Rass. industria solfifera, Caltanissetta 1908).



sale duro (*Hartsalz*) costituito essenzialmente da kieserite e salgemma, in seno al quale si trovano localmente banchi o lenti di un aggregato cristallino a grossa grana, di colore bigio, costituito essenzialmente da blödite (astrakanite) con druse e fenditure irregolarmente disposte, tappezzate da gruppi di belli e grandi cristalli dello stesso minerale.

I cristalli presentano due varietà distinte per il colore ed anche un poco per l'abito cristallino: i più sono incolori, limpidi, trasparenti e diventano opachi e bianchicci dopo esposizione all'aria; altri sono di color rossastro per inclusioni di ossido ferrico. Le loro dimensioni sono variabili, ma spesso considerevoli.

Appartengono al sistema monoclinico ed in generale sono appiattiti secondo la base con facce di prisma poco estese in direzione verticale; la clinodiagonale può essere lunga sino a 4-5 cm., l'ortodiagonale sino a 2-3 cm.

I cristalli rossastri hanno un maggior sviluppo della zona verticale e sono talora di abito nettamente prismatico.

Ho osservato le forme seguenti:

$a \{100\}$  ,  $c \{001\}$

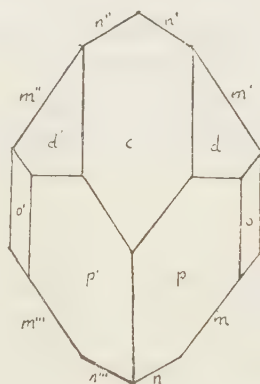
$m \{110\}$  ,  $n \{210\}$  ,  $\lambda \{310\}$

$d \{011\}$

$q \{201\}$

$p \{111\}$  ,  $o \{121\}$

$s \{211\}$



La combinazione più frequente è la  $c d p o m n$  con  $c p d$  predominanti (vedi figura);  $q$  ed  $s$  sono poco frequenti e di piccolissime dimensioni. Nei cristalli rossastri si trovano nella zona verticale anche le forme  $a$  e  $\lambda$  sempre molto subordinate.

Abito, forme e combinazioni corrispondono a quelli descritti per cristalli della stessa specie rinvenuti in vari cantieri della zona di Stassfurt<sup>(1)</sup>, e in modo particolare a quelli di Douglasshall presso Westregeln, di cui sono conservati esemplari in questo museo mineralogico romano.

(<sup>1</sup>) Vedi Groth, P. und Hinze C., *Ueber Krystallisirten Blödit von Stassfurt*. (Zeitschr. d. deut. geol. Gesellsch., 23, 1871, pag. 670); Luedcke O., *Ueber ein neues Vorkommen von Blöditkrystallen in Leopoldshaller Salzwerke*. (Zeitschr. f. Naturwiss. Halle, 58, 1885, pag. 645); Bücking H., *Glaserit, Blödit, Kainit, und Boracit von Douglasshall bei Westregeln* (Zeitschr. f. Kryst. u. Min., 15, 1889, pag. 561).

Allo scopo di esatta determinazione delle forme ho eseguito sui cristalli più appropriati le seguenti misure angolari, i cui risultati sono posti in confronto con i valori calcolati dalle costanti di Groth ed Hintze:

$$a : b : c = 1,34939 : 1 : 0.67047$$

$$\beta = 79^{\circ} 21' 42''$$

$m : n = (110) : (210)$	mis. $19^{\circ} 31'$	calc. $19^{\circ} 27'$
$n : n''' = (210) : (2\bar{1}0)$	" $67^{\circ} 4'$	" $67^{\circ} 6'$
$\lambda : \lambda''' = (310) : (3\bar{1}0)$	" $27^{\circ} 34'$	" $27^{\circ} 42'$
$c : d = (001) : (011)$	" $33^{\circ} 20'$	" $33^{\circ} 23'$
$c : p = 001 : (111)$	" $36^{\circ} 56'$	" $36^{\circ} 55'$
$p : p' = (111) : (1\bar{1}1)$	" $57^{\circ} 49'$	" $57^{\circ} 42' \frac{1}{2}$
$p : o = (111) : (121)$	" $18^{\circ} 49'$	" $18^{\circ} 53'$
$c : m = (001) : (110)$	" $83^{\circ} 27'$	" $83^{\circ} 37'$
$c : q = (001) : (2\bar{0}1)$	" $50^{\circ} 11'$	" $50^{\circ} 6'$
$n' : s = (2\bar{1}0) : (2\bar{1}1)$	" $44^{\circ} 32'$	" $44^{\circ} 21' \frac{1}{2}$
$s : q = (2\bar{1}1) : (2\bar{0}1)$	" $27^{\circ} 20'$	" $27^{\circ} 25'$

L'analisi chimica, eseguita su cristalli limpidi incolori, mi ha dato i seguenti risultati :

Na <sub>2</sub> O . . . . .	18,51
Mg O . . . . .	12,00
SO <sub>3</sub> . . . . .	47,41
H <sub>2</sub> O . . . . .	21,42
insol. . . . .	0,49
	<hr/>
	99,83

in buon accordo con i dati che si calcolano dalla formula



che sono :

Na <sub>2</sub> O . . . . .	18,56
Mg O . . . . .	11,98
SO <sub>3</sub> . . . . .	47,90
H <sub>2</sub> O . . . . .	21,56
	<hr/>
	100,00

Nella letteratura anche recente, che riguarda il minerale in questione, si trovano per esso adottati promiscuamente ed indifferentemente il nome di *blödite* o quello di *astrakanite*. Riesce strano inoltre che Jaeger <sup>(1)</sup> abbia

(<sup>1</sup>) Jaeger F. M., *Ueber die Identität des Hallstädter Symonjits mit dem Astrakanit*. Tschermaks miner. und petrogr. Mittheil. Wien, 22, 193, pag. 103.

proposto, e giustamente, l'eliminazione del nome *simonyite* dato da Tschermack ad un minerale del demanio salino austriaco di Hallstadt concludendo per la sua identità con l'astrakanite, senza peraltro far menzione che già dal 1871 Groth ed Hintze avevano concluso per la identità della *simonyite* e della *blödite*, trascurando così l'occasione di dimostrare l'identità delle tre specie e di proporre il nome da preferire. Il quale dovrebbe essere per diritto di priorità quello di *blödite* dato da John <sup>(1)</sup> nel 1821, ammenochè, come sembra essere il parere di Bücking il quale parla di roccia astrakanitica e di cristalli di *blödite*, non si voglia adottare il nome di *astrakanite* in senso di roccia, cioè del materiale che forma banchi o membri distinti nelle serie salifere o depositi estesi e potenti come quelli dei laghi salati della steppa di Astrakan, riservando il nome di *blödite* alla specie nello stretto senso mineralogico.

Nella massa del banco astrakanitico della galleria superiore di monte Sambuco si trovano in copia noccioli tondeggianti, dalla grandezza di un pisello sino a quella di un arancio, di un materiale bianco candido a finissima struttura granulare saccaroide, parzialmente deliquescente all'aria umida, perfettamente somiglianti a quelli consimili di boracite compatta (*stassfurtite*), che si rinvencono nei giacimenti di Stassfurt entro la carnallite. Saggi qualitativi indicano che effettivamente fra i componenti di questi noccioli sono acido borico, magnesia e cloro. Sulla loro esatta composizione intendo tornare prossimamente, dopo ultimata una completa analisi che sto eseguendo.

Matematica. — *Le trasformazioni puntuali fra varietà che conservano il parallelismo di Levi-Civita.* Nota di E. BOMPIANI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. Data una  $V_n$ , definita intrinsecamente dal suo

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{ik}^n a_{ik}(x_1, \dots, x_n) dx_i dx_k,$$

il prof. Levi-Civita ha introdotto su di essa la nozione di parallelismo <sup>(2)</sup> che, nella forma intrinseca osservata dal prof. Severi <sup>(3)</sup>, può esprimersi così:

In un punto P di una curva (*di trasporto*)  $c$  (di  $V_n$ ) è dato un elemento lineare arbitrario  $l$  (di  $V_n$ ); si consideri la superficie geodetica (di

<sup>(1)</sup> Chem. Schriften, 6, 1821, pag. 240.

<sup>(2)</sup> *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque ecc.* (Circolo Matematico di Palermo, tomo 42, 1917).

<sup>(3)</sup> *Sulla curvatura delle superficie e varietà* (ibidem). Per un'altra definizione del parallelismo, che non fa uso della proprietà integrale delle geodetiche, cfr. H. Weyl, *Raum. Zeit. Materie* (Berlin, Springer 1919, Cap. II, § 14).



$V_n$  in  $P$ ) definita da  $l$  e dall'elemento lineare  $PP'$  di  $c$ ; l'elemento lineare  $l'$ , uscente da  $P'$  sulla superficie geodetica e formante ivi con la geodetica determinata da  $PP'$  lo stesso angolo che  $l$  forma in  $P$  con  $c$ , si dice *parallela* ad  $l$  in  $P'$  secondo  $c$ ; con un processo d'integrazione risulta definita la parallela ad  $l$  secondo  $c$  in un punto qualunque di questa curva.

Una trasformazione puntuale (generalmente biunivoca) di una  $V_n$  in  $V'_n$  non è in generale siffatta che a direzioni parallele in  $V_n$  corrispondano direzioni parallele in  $V'_n$ : nasce quindi il problema di individuare quelle trasformazioni che conservano il parallelismo.

Per la proprietà caratteristica delle geodetiche di avere tutte le tangenti fra loro parallele (quando sia curva di trasporto la geodetica stessa), le trasformazioni in esame sono certamente geodetiche; quindi è chiaro che i mezzi per questa ricerca debbono attingersi dalla Memoria del prof. Levi-Civita, *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche* <sup>(1)</sup>, ove sono determinati i tipi di  $ds^2$  che ammettono trasformazioni geodetiche (che non siano semplicemente prodotti di una isometria per una similitudine).

2. Indichiamo con  $\xi^{(i)} = \frac{\delta x_i}{\delta s}$  i parametri della direzione da trasportare, con  $d$  la differenziazione da eseguire lungo la curva di trasporto in  $V_n$ ; aggiungiamo un apice alle grandezze corrispondenti relative alla varietà trasformata  $V'_n$ .

Poniamo

$$\xi'^{(i)}/\xi^{(i)} = \frac{\delta x_i}{\delta s'} : \frac{\delta x_i}{\delta s} = \frac{\delta s}{\delta s'} = e^\lambda,$$

$\lambda$  essendo funzione del posto e della direzione  $\delta$  che si trasporta.

Il trasporto per parallelismo è regolato dalle equazioni

$$\text{in } V_n: \quad d\xi^{(i)} = - \sum_{jl} \left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\} \xi^{(j)} dx_l$$

$$\text{in } V'_n: \quad d\xi'^{(i)} = - \sum_{jl} \left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\}' \xi'^{(j)} dx_l.$$

Utilizzando la posizione fatta, nella ipotesi di conservazione del parallelismo si ha

$$\xi^{(i)} d\lambda + \sum_{jl} \left( \left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\}' - \left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\} \right) \xi^{(j)} dx_l = 0.$$

Osserviamo subito che  $d\lambda = 0$ : infatti, detto  $\delta s$  l'elemento lineare da trasportare e  $\delta s^*$  l'elemento lineare d'arrivo dopo un cammino qualsiasi, si ha, per il parallelismo,  $\delta s = \delta s^*$ ; e poichè ad elementi paralleli in  $V_n$

<sup>(1)</sup> Annali di Matematica, ser. II, tomo XXIV (1896), pp. 255-300.

corrispondono elementi paralleli in  $V'_n$  si avrà pure  $\delta s' = \delta s'^*$ , cioè  $\delta s / \delta s' = \delta s^* / \delta s'^*$ , quindi  $\lambda$  non varia per il trasporto eseguito,  $d\lambda = 0$ . Dalle ultime equazioni, per l'arbitrarietà della direzione di trasporto (cioè delle  $dx_i$ ) e della direzione da trasportare (cioè delle  $\delta x_i$ ) si ha  $\left\{ \begin{smallmatrix} j l \\ i \end{smallmatrix} \right\}' = \left\{ \begin{smallmatrix} j l \\ i \end{smallmatrix} \right\}$  per  $j, l, i$  qualsiasi.

3. Siamo dunque condotti a caratterizzare quelle trasformazioni della forma (1) nelle quali sono invarianti tutti i simboli di Christoffel di 2<sup>a</sup> specie.

Indicando con  $a$  il discriminante della (1) e con  $a'$  quello della trasformata, dalle note identità

$$\sum_k \left\{ \begin{smallmatrix} k i \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log a}{\partial x_i}$$

segue, per l'identità dei simboli  $\left\{ \begin{smallmatrix} k i \\ k \end{smallmatrix} \right\}$  e  $\left\{ \begin{smallmatrix} k i \\ k \end{smallmatrix} \right\}'$ ,

$$\sum_k \left( \left\{ \begin{smallmatrix} k i \\ k \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} k i \\ k \end{smallmatrix} \right\}' \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \log \frac{a}{a'} = 0,$$

cioè  $a/a' = \text{costante} (\neq 0)$ ; poichè una costante moltiplicativa del  $ds$  è inessenziale per il problema potrebbe prendersi  $a = a'$ ; segue pure che il sistema derivato covariante del sistema  $a'_{rs}$  rispetto alla (1) è identicamente nullo (1).

4. Il procedimento del Levi-Civita (2) conduce a studiare le radici dell'equazione in  $q$  ottenuta annullando il determinante delle  $a'_{rs} - q a_{rs}$  e a dividere la ricerca in tanti tipi quanti sono i possibili casi di distribuzione delle radici stesse in rapporto alle loro molteplicità. Se si chiamano  $q_{p_1}, \dots, q_{p_{n-m+1}}$  ( $p_{n-m+1} = n$ ) le  $n - m + 1$  radici distinte, supposti gli indici  $p_1, p_2, \dots, p_{n-m+1}$  disposti in ordine crescente e in modo che  $\varepsilon_i = p_i - p_{i-1}$  ( $p_0 = 0$ ) rappresenti l'ordine di molteplicità della radice  $q_{p_i}$ , i due  $ds^2$  in

(1) Ciò segue dal lemma di Ricci applicato alla  $\sum a'_{rs} dx_r dx_s$  e dall'essere  $\left\{ \begin{smallmatrix} k i \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} k i \\ k \end{smallmatrix} \right\}'$ ; ma si ricava anche subito dalle equazioni (13) della Memoria *Sulle trasformazioni ecc.*,

quando vi si faccia  $\mu = C \left( \frac{a}{a'} \right)^{\frac{1}{n+1}} = \text{costante}$ . Il sistema  $a'_{rs}$  che qui si determina è un sistema doppio covariante *simmetrico* a sistema derivato nullo: per il caso di una forma *binaria* la determinazione dei sistemi doppi covarianti a sistema derivato nullo è stata fatta dal Cecconi (Atti Istit. Veneto, tomo LXXII, pag. 1435); per una superficie a curvatura non nulla e per sistemi doppi *simmetrici* si ha necessariamente  $a'_{rs} = c a_{rs}$ , d'accordo con quanto segue.

(2) Nella Memoria già citata, che qui riassumo solo in quanto è necessario per rendere intelligibili le notazioni; vedasi anche Ricci et Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* (Math. Ann., LIV Bd., 1900), Ch. V, § 4.

corrispondenza geodetica assumono la forma

$$ds^2 = \sum_l^{n-m+1} \prod_j^{n-m+1} |\psi_{p_j} - \psi_{p_l}| \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l} k_{rs} dx_r dx_s$$

$$ds'^2 = \frac{C}{(\psi_{p_1} + c) \dots (\psi_{p_{n-m+1}} + c)} \sum_l^{n-m+1} \frac{1}{\psi_{p_l} + c} \prod_j^{n-m+1} |\psi_{p_j} - \psi_{p_l}| \times$$

$$\times \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l} k_{rs} dx_r dx_s,$$

ove  $C$  e  $c$  sono due costanti arbitrarie;  $\psi_h$  è funzione della sola  $x_h$  se  $q_h$  è radice semplice, mentre è una costante ( $\neq 0$ ) nel caso opposto;  $\sum_{rs} k_{rs} dx_r dx_s$  è una forma differenziale positiva a soli  $\varepsilon_l$  argomenti; e infine  $\prod_j |\psi_{p_j} - \psi_{p_l}|$  indica il prodotto degli argomenti indicati per  $j \neq l$ .

Nel nostro caso, per essere  $a/a' = \text{cost.}$ , risulta <sup>(1)</sup> che *tutte le  $\psi_h$  sono costanti* (fra loro differenti); sicchè, liberati da coefficienti costanti inessenziali, gli elementi lineari corrispondenti si scrivono

$$ds^2 = \sum_l^{n-m+1} \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l} k_{rs} dx_r dx_s$$

$$ds'^2 = \sum_l^{n-m+1} \frac{1}{\psi_{p_l}} \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l} k_{rs} dx_r dx_s.$$

5. Il risultato diviene geometricamente evidente se si cerca di realizzare questi elementi lineari in un ambiente euclideo.

Si costruisca per ogni valore di  $l$  una  $V_{\varepsilon_l}$ , che diremo  $\sigma_l$ , avente l'elemento lineare dato da  $ds_{(l)}^2 = \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l} k_{rs} dx_r dx_s$ , entro uno spazio euclideo

$S_{(l)}$  (la cui dimensione sarà al massimo  $(l) = \frac{\varepsilon_l(\varepsilon_l + 1)}{2}$ ). Disponiamo questi  $S_{(l)}$  entro uno  $S_{(1)+(2)+\dots+(n-m+1)}$  in modo ch'essi abbiano un punto comune per cui passino tutte le  $\sigma_l$  e risultino a due a due ortogonali. Teniamo fisso  $S_{(1)}$ , e spostiamo  $S_{(2)}$ , parallelamente a se stesso (quindi ortogonalmente a  $S_{(1)}$ ) in  $S_{(1)+(2)}$ , trascinando seco  $\sigma_2$  in modo che il punto fissato su  $\sigma_2$  descriva tutta la  $\sigma_1$ : si ha una  $V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$  che risulta di traslazione, sia rispetto a  $\sigma_2$  sia a  $\sigma_1$ . Poi spostiamo  $S_{(3)}$ , con entro  $\sigma_3$ , in modo che il punto fissato su  $\sigma_3$  descriva la  $V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$  e si avrà una  $V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}$ ; e così

<sup>(1)</sup> Dalle equazioni (E) (24) in *Sulle trasformazioni* ecc., oppure E) d) in *Méthodes* ecc., quando vi si faccia  $\mu = \text{cost.}$



di seguito, fino ad ottenere una  $V_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-m+1}} = V_n$ : essa realizza il primo  $ds^2$  <sup>(1)</sup>.

Se ora applichiamo una similitudine, con rapporto d'ingrandimento  $\sqrt{1/\psi_l}$  secondo la giacitura di  $S_{(l)}$ , cioè applichiamo all'ambiente della  $V_n$  un'affinità speciale avente come giaciture di punti uniti quelle degli  $S_{(l)}$ , otteniamo la più generale trasformata per parallelismo di Levi-Civita della  $V_n$  data (a meno di una isometria).

Se tutte le  $\varrho$  fossero coincidenti (come avviene per una  $V_n$  generale), i due  $ds^2$  non differirebbero se non per un fattore (cioè le due  $V_n$  per una similitudine dell'ambiente); se tutte le  $\varrho$  fossero distinte (quindi  $\varepsilon_l = 1$ ,  $(l) = 1$ ) la  $V_n$  sarebbe euclidea, e la trasformazione si riduce, come deve, ad una affinità.

È poi evidente, sul modello costruito, che le  $V_{\varepsilon_l}$  sono *totalmente geodetiche* entro  $V_n$ .

Matematica. — *Sulle varietà che ammettono una traslazione infinitesima*. Nota di O. ONICESCU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Supponiamo che una varietà  $V_n$ , di elemento lineare

$$ds^2 = \sum_{i,k}^n a_{ik} dx_i dx_k,$$

ammetta un movimento rigido lungo una congruenza di linee [C]. Se

$$X(f) = \sum \xi^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

è la trasformazione infinitesima del movimento, le  $\xi^{(i)}$  sono, con le notazioni del calcolo differenziale assoluto, proporzionali ai parametri controvarianti delle linee della congruenza [C]: indicherò questi parametri con  $\lambda_n^{(i)}$ , l'indice  $n$  alludendo al proposito di considerare quanto prima assieme a [C] altre  $n - 1$  congruenze ad essa ortogonali.

Si sa che le  $\xi^{(i)}$  devono soddisfare alle equazioni di Killing, le quali con le notazioni che adoperiamo si scrivono

$$(1) \quad \xi_{ij} + \xi_{ji} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

(<sup>1</sup>) La sua classe (secondo il Ricci) è quindi

$$= (1) + (2) + \dots + (n - m + 1) \leq \sum_l \frac{\varepsilon_l(\varepsilon_l - 1)}{2}.$$

Esprimendo le  $\xi_i$  sotto forma canonica

$$\xi_i = \varrho \lambda_{n/i}$$

con che  $\varrho$  rappresenta l'ampiezza dello spostamento rigido considerato, le equazioni (1) diventano

$$(2) \quad \lambda_{n/ij} + \lambda_{n/ji} = \mu_i \lambda_{n/j} + \mu_j \lambda_{n/i}$$

nelle quali  $\mu = \log \varrho^{-1}$ .

2. Ciò premesso, proponiamoci di ricercare a quali condizioni debba ottemperare la [C], e, se del caso, addirittura la metrica della varietà  $V_n$ , perchè il movimento rigido infinitesimo (nel quale ogni punto si sposta di  $\varrho$  lungo la linea C che passa per esso) abbia *carattere traslatorio*, nel senso che: la corrispondenza delle direzioni (uscenti da un punto generico prima e dopo lo spostamento rigido) debba ridursi ad un semplice trasporto per parallelismo (di Levi-Civita) lungo le linee C. Notiamo subito che questa definizione di spostamento traslatorio è assai più completa (e quindi più restrittiva) di quella concernente soltanto l'eguaglianza delle ampiezze per ogni punto ( $\varrho = d$ ) con cui si caratterizzano i così detti scorrimenti <sup>(1)</sup>. Vedremo che alle nostre traslazioni infinitesime competono proprio tutte le proprietà delle traslazioni dell'ordinario spazio euclideo, compresa la costanza dell'ampiezza.

3. Per la trattazione matematica della questione conviene in primo luogo associare alla congruenza [C] altre  $n - 1$  congruenze ortogonali tra loro e a [C], per formare una  $n$ -upla ortogonale caratterizzata dai sistemi covarianti  $\lambda_{h/i}$  ( $h = 1, 2, \dots, n$ ).

Denotiamo col simbolo  $d$  l'incremento (di una generica funzione del posto) dovuto al movimento rigido elementare, con  $\delta$  l'incremento corrispondente ad uno spostamento elementare con parallelismo di Levi-Civita, e ricordiamo che, lungo una linea di elemento lineare  $\delta s_n$ , quest'ultimo incremento è definito dalle formole <sup>(2)</sup>

$$\frac{\delta \lambda_i}{\delta s_n} = \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_n^{(j)} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

4. L'equivalenza del movimento rigido con lo spostamento, a parallelismo, di una direzione qualunque  $\lambda_i$ , lungo la linea C, si scrive

$$d\lambda_i = \delta \lambda_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

<sup>(1)</sup> Cfr. L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui di trasformazioni* [Pisa, Spoerri, 1918], § 183.

<sup>(2)</sup> T. Levi-Civita, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XLII, 1917, pp. 173-204] § 5.

In base alla formola precedente, ed osservando che  $\frac{dx_j}{ds_n} = \lambda_n^{(j)}$ , questa equivalenza assume l'espressione

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} \lambda_n^{(j)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left\{ \begin{matrix} i & j \\ & l \end{matrix} \right\} \lambda_n^{(j)} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ove si ricordi la formola di derivazione covariante

$$\lambda_{ij} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^n \left\{ \begin{matrix} i & j \\ & l \end{matrix} \right\} \lambda_l$$

si ha più semplicemente

$$(3) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_n^{(j)} \lambda_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

È evidentemente sufficiente che le (3) siano soddisfatte per una direzione qualunque  $\lambda_{h/i}$  della  $n$ -upla ortogonale, ciò che dà le equazioni

$$(4) \quad \sum_{j=1}^n \lambda_n^{(j)} \lambda_{h/ij} = 0 \quad (h, i = 1, 2, \dots, n)$$

che esprimono le condizioni necessarie e sufficienti perchè il movimento, che supponiamo rigido, avvenga con parallelismo. Per ottenere equazioni invarianti, moltiplichiamo i primi membri in (4) per  $\lambda_k^{(i)}$  e sommiamo, ciò che dà

$$\sum_{ij=1}^n \lambda_k^{(i)} \lambda_n^{(j)} \lambda_{h/ij} = 0 \quad (k, h = 1, 2, \dots, n).$$

Il primo membro rappresenta <sup>(1)</sup> il coefficiente di rotazione  $\gamma_{hkn}$  ed abbiamo quindi in forma più comprensiva

$$(A) \quad \gamma_{hkn} = 0 \quad (k, h = 1, 2, \dots, n).$$

Per  $h = n$  e  $k$  arbitrario si ha in primo luogo

$$(5) \quad \gamma_{nkn} = 0;$$

dunque si ha che le linee  $C$  sono geodetiche <sup>(2)</sup>.

Per  $h \neq k \neq n$  le (A) esprimono che la rotazione durante il movimento è nulla.

5. Esaminiamo adesso più da vicino le conseguenze portate dalle equazioni di Killing, tenendo conto dei risultati precedenti, compendiate nelle (A).

<sup>(1)</sup> G. Ricci e T. Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu* [Mathematische Annalen, Bd. 53, 1901], pag. 148.

<sup>(2)</sup> La stessa Memoria, pag. 154.



Moltiplicando le (2) per  $\lambda_h^{(i)} \lambda_k^{(j)}$  e sommando rispetto ad  $i$  e  $j$ , ove si tengano ancora presenti le definizioni dei coefficienti di rotazione  $\gamma$ , si ha:

$$(6) \quad \sum_{i,j}^n \lambda_k^{(j)} \lambda_h^{(i)} (\mu_i \lambda_{n/j} + \mu_j \lambda_{n/i}) = \gamma_{nhk} + \gamma_{nkh} \quad (h, k = 1, 2, \dots, n).$$

Per  $h, k \neq n$  il primo membro si annulla identicamente; dunque

$$\gamma_{nhk} + \gamma_{nkh} = 0 \quad h, k \neq n,$$

relazioni di cui il significato è che: *le  $n-1$  congruenze associate a [C] costituiscono un sistema canonico (e ciò comunque si scelgano le congruenze stesse).*

In virtù delle (5) abbiamo  $\gamma_{nhn} = 0$ ; dunque, per  $k = n$ , le (6) diventano

$$\sum_{i=1}^n \lambda_h^{(i)} \mu_i = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

*Ne consegue  $\varrho = \text{cost.}$ , donde l'annunciata proprietà delle traslazioni di far subire, a tutti i punti, spostamenti di eguale ampiezza (cioè di entrare fra gli scorrimenti).*

Le (6) si riducono così alla forma

$$(B) \quad \gamma_{nhk} + \gamma_{nkh} = 0 \quad (h, k = 1, 2, \dots, n)$$

e insieme alle (A) porgono le condizioni necessarie e sufficienti perchè la congruenza [C] sia costituita da traiettorie di un moto rigido traslatorio.

6. Per esaurire rapidamente la discussione del sistema (A), (B), giova trar partito dalla circostanza che possiamo sempre dare alla trasformazione infinitesimale la forma  $X(f) = \frac{\partial f}{\partial x_n}$ .

Questo implica  $\xi^{(i)} = 0$  per  $i < n$ ,  $\xi^{(n)} = 1$ , ossia

$$(7) \quad \lambda_n^{(i)} = 0 \quad \text{per } i < n, \quad \text{e } \lambda_n^{(n)} = \frac{1}{\varrho},$$

che in base ai risultati precedenti è una costante.

Le equazioni di Killing equivalgono, in questo caso, ad avere tutte le  $a_{ik}$  indipendenti da  $x_n$ .

Dalle relazioni di ortogonalità

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{k/i}^{(i)} \lambda_n^{(i)} = \varepsilon_{kn},$$

per le (7) risulta

$$(8) \quad \lambda_{k/n} = 0 \quad \text{per } k < n, \quad \text{e } \lambda_{n/n} = \varrho = \text{cost.}$$

Le equazioni (4), per le stesse (7), danno

$$(9) \quad \lambda_{k/in} = 0 \quad (k, i = 1, 2, \dots, n).$$

Ma noi abbiamo, secondo la formola di derivazione covariante.

$$\lambda_{k/in} = \frac{\partial \lambda_{k/i}}{\partial x_n} - \sum_{l=1}^n \left\{ \begin{matrix} i & n \\ & l \end{matrix} \right\} \lambda_{k/li} \quad (k, i = 1, 2, \dots, n).$$

Essendo i coefficienti  $a_{rs}$  indipendenti da  $x_n$ , al pari dei parametri  $\lambda_n^{(i)}$ , si possono ritenere indipendenti da questa variabile anche i parametri e i momenti  $\lambda_k^{(i)}$ ,  $\lambda_{k/i}$  delle altre  $n-1$  congruenze che sono vincolate soltanto a costituire un'ennupla ortogonale colla [C]. Allora le (9), associate alla formola precedente, danno

$$(10) \quad \sum_{l=1}^n \left\{ \begin{matrix} i & n \\ & l \end{matrix} \right\} \lambda_{k/li} = 0 \quad (k, i = 1, 2, \dots, n).$$

Consideriamo adesso il coefficiente di rotazione  $\gamma_{knh}$ , che è, secondo una formola già citata,

$$\gamma_{knh} = \sum_{ij} \lambda_n^{(j)} \lambda_h^{(i)} \lambda_{k/ji},$$

e quindi, per le semplificazioni (7),

$$\gamma_{knh} = \frac{1}{\varrho} \sum_{i=1}^n \lambda_h^{(i)} \lambda_{k/ni}.$$

In questa espressione si ha

$$\lambda_{k/ni} = \frac{\partial \lambda_{k/n}}{\partial x_i} - \sum_{l=1}^n \left\{ \begin{matrix} n & i \\ & l \end{matrix} \right\} \lambda_{k/li} \quad (k, i = 1, 2, \dots, n).$$

Ma, in virtù delle (8) e (10), segue

$$\lambda_{k/ni} = 0 \quad (k, i = 1, 2, \dots, n);$$

dunque i coefficienti di rotazione, ora considerati, si annullano. Scriveremo, cambiando i primi due indici,

$$(11) \quad \gamma_{nhk} = 0 \quad (h, k = 1, 2, \dots, n),$$

le quali mostrano in particolare che la congruenza [C] è normale. Ad esse possiamo sostituire le equivalenti

$$(11') \quad \lambda_{n/ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Ci troviamo oramai nelle condizioni incontrate dal prof. Levi-Civita <sup>(1)</sup> per le congruenze a parallelismo completo.

(<sup>1</sup>) § 14 della citata Memoria sul parallelismo.

Beneficiando della conclusione di quella ricerca, possiamo concludere noi stessi: Perchè una varietà ammetta una traslazione elementare, nel senso sopra definito, è *necessario e sufficiente che l'elemento lineare possa assumere la forma*

$$ds^2 = dx_n^2 + d\sigma^2$$

(dunque la varietà deve ammettere  $\infty^1$  superficie geodeticamente parallele), essendo, in più, nulli i coefficienti di rotazione  $\gamma_{hkn}$  ( $h, k \neq n$ ).

Botanica. — *Corallinacee del litorale tripolitano* <sup>(1)</sup>. Nota III della dott<sup>ssa</sup>. R. RAINERI, presentata dal Socio O. MATTIROLO.

Le forme di *Lithothamnium* e di *Lithophyllum* descritte nelle precedenti Note (pag. 282. e pag. 313), per la loro massa calcarea, rappresentano elementi attivamente costruttori della panchina. Per completare l'esame delle alghe calcari raccolte dal prof. Parona, accennerò anche ad alcuni generi di Coralline che vivono, protette, nelle anfrattuosità rocciose della costa libica.

*Corallina officinalis* Linn.

(Bibl. De-Toni, *Sylloge algarum*, vol. IV, pag. 1840).

È un piccolo cespuglio biancastro, assai calcarizzato, di circa 1 cm. di alt. per 3 cm. di largh., con gli apici smussati. per l'eccessiva fragilità, per cui, mancando i concettacoli che si trovano all'estremità dei rami, dovetti classificarla servendomi degli altri caratteri. Il colore del tallo, decalcificato, è giallastro, tendente al verde; ben netta la divisione tricotoma dei rami, i cui articoli, innestati l'uno nell'altro, con una strozzatura non calcificata, sono appiattiti e diminuiscono di dimensione dalla base dei rami all'estremità. In ciascun articolo si alternano strie scure e strie chiare, disposte ad arco, che ricordano la struttura dei *Lithophyllum*, ma la lunghezza delle cellule non è la stessa in file vicine.

Un altro piccolo campione, meno calcarizzato del precedente, d'aspetto filamentoso esilissimo, ha i rami terminati con ingrossamenti, appiattiti a spatola, pur conservando, nelle altre parti della fronda, i caratteri della *C. officinalis* che fu anche detta *C. spathulifera* Kuetz.

*Hab.*: Marina di Sciarra-Sciat.

*Distr. geogr.*: Mar Mediterraneo; Mar Nero; Lapponia; Siberia: Atlantico.

(<sup>1</sup>) Lavoro eseguito nel R. Orto Botanico di Torino.



Piccone (1) segnala la *Corallina officinalis* per la Cirenaica senza fissare località e senza descriverla.

Nuova per la Tripolitania.

*Corallina mediterranea* Areschoug.

(Bibl. De-Toni, *Sylloge algarum*, vol. IV, pag. 1841).

Rametti esili, poco calcificati, biancastri, intrecciati. I concettacoli sono numerosissimi all'estremità di quasi tutti i rami, muniti di cornetti lunghi pluriarticolati, che danno all'alga un aspetto di fitta ramificazione. I concettacoli sono piriformi; le tetraspore, in essi contenute, non si vedono se non confusamente. I singoli articoli del tallo, lineari, sono uniti con una articolazione non calcificata e dati da cellule non terminanti allo stesso punto in file vicine.

*Hab.*: Marina di Sciara-Sciat.

*Distr. geogr.*: Mare Mediterraneo presso Alessandria d'Egitto.

Nuova per il litorale tripolitano.

*Peyssonelia rubra* Grev.

(Bibl. De-Toni, *Sylloge algarum*, vol. IV, pag. 1696).

Quantunque appartenga alla famiglia delle Squamariacee, accenno alla *Peyssonelia rubra* che, per « habitus » esterno e per parecchi caratteri della struttura anatomica, ricorda le alghe calcari sopra descritte.

Sottile crosta di colore rosso sopra il *Lithophyllum decussatum*, poco calcificata, non fogliacea, assai aderente al *substratum*. La struttura anatomica non si può osservare se non decalcificando l'alga come per le Melobesie. Il tessuto è compatto: le cellule sono quadrangolari o rettangolari, con pareti inspessite. Le file di cellule sono molto aderenti, un po' oblique; alla superficie sono piccole schiacciate ( $\mu$  5,2 di alt.  $\times$   $\mu$  10,4 largh.), vuote; nella zona media sono quadrangolari ( $\mu$  10,4  $\times$   $\mu$  7,8) e contengono qualche granulo d'amido; le basali sono più allungate ( $\mu$  18,8 alt.  $\times$   $\mu$  10,4 largh.), ripiene di amido e munite di appendici che tengono l'alga aderente al *substratum*. La struttura anatomica della *P. rubra* è molto somigliante a quella della *P. polymorpha* descritta e disegnata da M. Lemoine (2), pur avendo dimensioni cellulari minori; ma la *P. polymorpha* è più calcificata. Credo trattarsi della *P. rubra* (Hauck *Meeresalgen*, pag. 34, fig. 7) figurata da Hauck che non dà la dimensione delle cellule, leggermente modificata nei suoi caratteri, perchè si trova in uno stadio giovanile; infatti mancano i peritecii.

(1) « Ann. Ist. bot. », Roma, V, 1892, pag. 52.

(2) Lemoine, « Bulletin de la Société botanique de France », 1912, tome XII, pag. 358.

*Hab.*: Gargaresch.

*Distr. geogr.*: Mediterraneo (Algeria, Tunisia, Tripolitania).

Delle tredici specie descritte in queste Note, non erano ancora state segnalati per la Libia: *Lithothamnium Lenormandi*, *Lith. crispatum*, *Lith. Philippii*, *Lithophyllum decussatum*, *Melobesia Lejolisii*, *Corallina mediterranea*. Il contributo apportato da questa piccola collezione alla conoscenza della flora algologica libica è perciò non piccolo.

Ho lavorato attorno al tema, che mi fu proposto, con amore, nella fiducia che la mia opera non solo possa tornar utile, cooperando allo studio scientifico del nostro mare, ma possa altresì avere qualche valore, dal punto di vista pratico, allo scopo di far conoscere meglio la natura litologica del litorale tripolino.

Certo è che le presenti analisi morfologiche dimostrano la bontà del metodo preconizzato e, con tanta competenza, illustrato dalla signora Lemoine, alla quale dobbiamo il moderno progresso in questo gruppo di alghe alquanto critico e difficile anche per laboriosità di tecnica. Tale risultato, che spero sarà gradito alla gentile signora, voglia essere l'espressione della mia gratitudine per il cortese appoggio da lei accordatomi.

Biologia. — *Contributo alla conoscenza del sistema escretore del baco da seta* <sup>(1)</sup>. Nota I della dott. ANNA FOÀ, presentata dal Socio B. GRASSI.

Ho intrapreso da tempo uno studio sull'apparato circolatorio e su quello escretore del baco da seta, collo scopo di ricercare le differenze esistenti tra le condizioni dei bachi sani e quelle dei bachi malati di flaccidezza. Il lavoro è ancora incompleto soprattutto perchè la parte che si riferisce alle modificazioni dei corpuscoli sanguigni mi ha presentato delle difficoltà assai più ardue di quelle che in principio avessi supposto. Una delle circostanze che maggiormente contribuiscono ad ostacolare la possibilità di formulare delle conclusioni, è l'estrema variabilità di reperto in bachi che apparentemente dovrebbero trovarsi nelle stesse condizioni per origine, età, nutrimento, ecc. La quantità dei corpuscoli contenuti nel plasma sanguigno, le proporzioni rispettive nel numero delle varie sorta di corpuscoli, e anche il modo di comportarsi dei corpuscoli rispetto a sostanze estranee all'organismo inoculate nel sangue, variano secondo leggi che per ora mi sfuggono.

<sup>(1)</sup> Ricerche eseguite in parte nell'Istituto bacologico di Portici diretto dal professore C. Acqua, in parte nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

Non potendo prevedere quando potrà apparire il lavoro completo, credo opportuno comunicare in forma preliminare alcuni punti che finora ho potuto stabilire.

Lascio per ora di parlare dei corpuscoli sanguigni la cui parte nella funzione escretoria deve ancora essere precisata, e mi occupo dell'apparato escretore propriamente detto.

*Ghiandole peri- ed endocardiche, e ghiandole peritracheali.* — Queste ghiandole sono state già in parte descritte come nastrini di colore giallognolo o verdastro nelle razze di bachi a bozzolo colorato. Le ghiandole pericardiche si estendono lungo il vaso dorsale e lungo i muscoli aliformi, le endocardiche stanno nell'interno del vaso dorsale. Le ghiandole peritracheali finora sono state descritte solo parzialmente come frammenti di nastrini ramificati, situati attorno agli stigmi e prolungantisi lungo i tronchi tracheali principali.

Io ho potuto mettere in luce che le ghiandole peritracheali si riuniscono tra loro e formano un sistema di trabecole costituito da due tronchi principali che percorrono lateralmente il corpo dell'animale in tutta la sua lunghezza, e attorno agli stigmi mandano una serie di rami i quali vengono a contatto colle ghiandole pericardiche situate nei muscoli aliformi. Alcuni rami si estendono anche dal lato ventrale e si anastomizzano tra loro. Ho potuto anche dimostrare che il sistema delle ghiandole pericardiche, endocardiche e peritracheali, reagisce in modo caratteristico contro sostanze estranee introdotte nel corpo dell'animale.

Se si inietta in un baco da seta nell'ultimo stadio larvale una miscela di acido carminico all'1 % (in acqua distillata) e di bleu di metilene pure all'1 % (idem) in parti eguali, in modo che il liquido assuma una tinta di color violetto intenso e si apre l'animale 24 ore dopo l'iniezione, si vede che il bleu di metilene è raccolto in piccoli grumi sparsi per tutto il corpo, soprattutto in mezzo al tessuto adiposo, più fitti nella regione più prossima al punto dove fu praticata l'iniezione. In questi grumi, varî per forma e dimensioni, sono compresi anche numerosi corpuscoli sanguigni; ma i grumi non sono esclusivamente costituiti da ammassi di corpuscoli; vi è anche una parte che si direbbe un precipitato di qualche sostanza contenuta nel plasma sanguigno.

Il sistema delle ghiandole peri- ed endocardiche e peritracheali appare invece nettamente colorito in rosso intenso.

Qualche cosa di analogo si verifica se si inietta una miscela di acido carminico all'1 % unita ad una soluzione densa di inchiostro di China tanto che il miscuglio appaia quasi nero (fig. 1).

Dopo ventiquattro ore l'inchiostro di China si trova raccolto in piccoli grumi sparsi per il corpo, come avveniva per il bleu di metilene, mentre il sistema delle ghiandole peri- ed endocardiche e peritracheali appare colorito in rosso intenso.



Con le iniezioni di indaco-carminio e di carminato di ammoniaca questo sistema non resta colorito affatto; delle sostanze iniettate rimane solo traccia nei tubi Malpighiani.

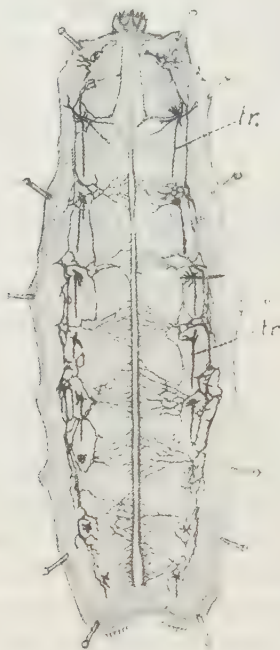


FIG. 1. — Sistema delle ghiandole peri- ed endocardiche e peritracheali come appare in un baco aperto 24 ore dopo una iniezione di acido carminico all'1% e d'inchiestro di China. Per non complicare la figura i grumi dell'inchiestro di China sparsi per tutto il corpo non sono stati rappresentati. Nell'animale le ghiandole soprannominate vivamente colorite in rosso risaltavano moltissimo vicino alle trachee colorite in nero; nella figura le trachee (soltanto alcune sono state richiamate colle lettere *tr*) si distinguono appena perchè di tinta un po' più oscura.

In conclusione, le ghiandole peri- ed endocardiche e peritracheali formano un sistema di escrezione specifica per determinate sostanze (probabilmente reazione acida).

Patologia. — *Risanamento dei malarici cronici per mezzo dei raggi X*<sup>(1)</sup>. Nota del dott. ANTONINO PAIS, presentata dal Socio B. GRASSI.

Volge a termine il quinto mese da che, per incoraggiamento del *Comitato promotore per la cura dei malarici cronici e chinino-resistenti per mezzo dei raggi X*<sup>(2)</sup>, iniziai l'esperimento dei malarici cronici per mezzo della radioterapia nella Stazione Sperimentale Antimalarica di Fiumicino.

Il numero degli individui trattati in questo primo periodo di tempo può considerarsi ragguardevole e tale da consentire un breve esame dei primi risultati ottenuti.

Le considerazioni a cui mi accingo emergono dai primi cento malarici irradiati.

*Perchè fu scelta la Stazione Sperimentale Antimalarica di Fiumicino.* — La Stazione Sperimentale di Fiumicino, diretta dal prof. B. Grassi, si presentava come eccellente campo per questi progettati esperimenti di bonifica. Un'organizzazione accurata e vigile raccoglie fin dal 1918 quotidianamente i dati nosologici di tutti coloro che vengono colpiti dall'infezione palustre. Ogni malarico è sottoposto ad assidua sorveglianza nella sua vita familiare e sul lavoro, sicchè non possano sfuggire nemmeno quelle lievi manifestazioni dell'infezione che i recidivanti ed i cronici tralasciano di denunciare spontaneamente, anzi spesso nascondono. Ogni individuo, per conseguenza, ha una così lunga storia della propria infezione, quale non possiedono i malati temporaneamente accolti nelle corsie ospitaliere e nelle cliniche.

Gli esperimenti di radioterapia della malaria erano stati da me condotti con larghezza di materiale e per lo spazio di tre anni appunto nell'ambiente ospitaliero.

Superato il periodo sperimentale clinico, io mi proponeva invece di fare un esperimento pratico di risanamento dei malarici cronici non sottratti all'ambiente familiare, al loro quotidiano lavoro spesso grave e debilitante, non circondati da quelle complesse condizioni favorevoli di vita le quali per sé possono ristabilire l'equilibrio fisiologico interrotto da un improvviso epi-

(1) Lavoro eseguito nella Stazione Sperimentale Antimalarica di Fiumicino, diretta dal sen. prof. B. Grassi, per incarico della Direzione di Sanità Pubblica.

(2) Il « Comitato promotore per la cura dei malarici cronici e chinino-resistenti per mezzo dei raggi X » è sorto a Milano per iniziativa dei senatori prof. Mangiagalli ed ing. Pirelli. È così costituito: sen. Mangiagalli, presidente; senatori Pirelli, Albertini, Gavazzi, Saldini, on. Valvassori-Peroni, Salterio; avv. Mazza, segretario.

sodio febbrile. Interessava, al contrario, mettere il nuovo metodo alla prova delle complesse difficoltà di un vero risanamento: *indagare in quale misura, favorevolmente sperimentato come metodo clinico, potesse giovare la radioterapia eccitante, da me proposta, nella libera campagna alla cura dei malarici cronici e quindi indirettamente come mezzo di profilassi anti-malarica.*

*Radioterapia e malaria cronica.* — Tremila esperimenti mi avevano in precedenza dimostrato che, fra tutte le forme di malaria, si dimostra sensibilissima all'azione dei raggi X la malaria cronica e chinino-resistente.

Il principio da cui ero partito in tali esperienze (*la possibilità di eccitare gli organi ematopoietici per mezzo dei raggi X*), aveva trovato la più larga conferma nelle seguenti conclusioni sperimentali che altrove ho riferito: *quanto più gravi sono le alterazioni degli organi ematopoietici, quanto più grave è l'anemia malarica, e più gravi le alterazioni della milza, tanto maggiore è l'azione curativa dei raggi X. Questi rendono efficace la chinina a dosi anche piccolissime là ove l'infermo, fortemente chininizzato e profondamente depresso per alterazione degli organi formatori del sangue, non risentiva più i benefici dell'alcaloide anche generosamente somministrato* <sup>(1)</sup>.

Le condizioni, che la radioterapia mostra di risolvere elettivamente, costituiscono appunto l'essenza stessa del problema malarico, poichè degli accessi febbrili nella malaria acuta ha pienamente ragione la chinina opportunamente somministrata.

*I malarici di Fiumicino.* — Fiumicino, con Porto. Maccarese-macchine ecc., era, sino a qualche anno fa, uno dei luoghi più malarici dell'Agro Romano. Nel 1918, nonostante il lavoro di bonifica molto intenso compiuto dal prof. B. Grassi, il 66 % della popolazione veniva ancora colpita dalle febbri. Nel 1919 il numero delle infezioni primitive era stato minimo, ma le recidive erano ancora numerose, sebbene diminuissero specialmente nel secondo semestre. Il successo arrideva quindi all'opera ardita e faticosa del prof. Grassi.

Quando nel dicembre 1919 iniziai gli esperimenti di risanamento per mezzo della radioterapia, rimaneva ancora nella popolazione stabile di Fiumicino un numero relativamente grande di individui i quali, sebbene fossero

<sup>(1)</sup> A. Pais, *L'Influenza dei raggi X sulla malaria*. Gazzetta d. Osp. e d. Clin., n. 84, anno 1917; *L'Influenza dei raggi X sulla curva termica della malaria*. Fratelli Bocca; *La cura della malaria cronica per mezzo dei raggi X*, Ann. d'Igiene, anno XXIX, fasc. VI; *Radioeccitamento degli organi ematopoietici nella malaria*. Reale Accademia dei Lincei, vol. XXVIII, ser. 5<sup>a</sup>, 2<sup>o</sup> sem., fasc. 8<sup>o</sup>; *L'alto valore della radioterapia nella malaria cronica e nella profilassi antimalarica*. Gazzetta d. Osp. e d. Cliniche, 1919, n. 8; *Radioexcitation des organes hématopoïétiques dans le paludisme*. Archiv. d'Électricité Médicale, sept. 1919.



apirettici da un tempo più o meno lungo, conservavano tuttavia i segni evidenti dell'infezione, malgrado le intense cure ricostituenti anche in luoghi di cura e di convalescenza. Non mancavano inoltre pochi infermi ostinatamente recidivanti. Invece, tra la popolazione avventizia di Fiumicino (pescatori, marinai, contadini, operai) s'incontravano svariati casi di febbre più o meno acuta, provenienti da altre regioni dell'Agro Romano, non ancora curati o appena all'inizio della cura. Casi di questo genere erano poi frequenti a Porto, Maccarese-macchine ecc., dove il prof. Grassi andava estendendo la sua opera di bonifica da qualche mese.

Tutte le forme di malaria erano dunque rappresentate: dalle forme acute degli immigrati, ai postumi malarici dei già curati nella Stazione Sperimentale, la quale per conseguenza presentava tutte le condizioni di favore per l'esperimento.

*Inizio degli esperimenti.* — Nell'ottobre dello scorso anno mi accinsi quindi all'impianto di un laboratorio di radioterapia a Fiumicino, corredato da tutto quanto potesse occorrere per le ricerche cliniche e specialmente ematologiche. Tutte le mie cure furono rivolte alla soluzione pratica dei problemi tecnici che la nuova terapia *radio-eccitante* da me proposta imponeva; era infatti necessario, abbandonando i classici dettami della *terapia radio-distruttiva*, creare un sistema di apparecchi che fornissero dosi molto uniformi e piccole, raggi di una grande penetrazione.

Iniziai le prime cure sugli individui più volenterosi, e più gravemente provati dall'infezione. Non incontrai diffidenze ai primi passi. La disciplina fiduciosa della popolazione verso la direzione della Stazione Sperimentale fece accogliere benevolmente i primi esperimenti. Il numero degli ammalati andò rapidamente aumentando nel breve volgere di poche settimane.

È avvenuto a Fiumicino quanto io prevedeva per precedenti esperimenti.

Il primo effetto delle irradiazioni è la scomparsa dei dolori splenici. Dopo la seconda seduta generalmente, talvolta dopo la prima stessa irradiazione, i dolori spontanei della milza, o provocati dal lavoro, dal correre, ecc., si attenuano e rapidamente scompaiono. Indipendentemente da ogni altra modificazione dello stato generale e del ciclo febbrile, questo migliorato segno subiettivo, che si accompagna a diminuzione del tumore splenico, concilia la fiducia quasi illimitata degli infermi, i quali appunto nei periodi di apiressia sono richiamati al doloroso ricordo dell'infezione dal molesto senso di peso e di dolore.

Il numero degli ammalati aumentò quindi in rapporto di questo primo successo conosciuto rapidamente da tutti gli altri malarici, e in tal misura da esporre gli operatori ad una fatica assai rude e gli apparecchi ad un sopralavoro che condusse ben presto al loro irregolare funzionamento, infine alla loro distruzione.

*Irregolarità delle sedute.* — Duravano gli esperimenti da qualche mese appena, allorchè fui costretto ad interrompere le sedute per modificare gli apparecchi e sostituire quelli inutilizzati.

Il primo vero esperimento di radioterapia su larga scala è, che io sappia, questo di Fiumicino. Non sorprende quindi che gli apparecchi, costruiti per un funzionamento limitato agli usi della terapia comune, non abbiano sopportato il maggior lavoro loro imposto. Un apparecchio per radioterapia adatto alla bonifica di popolazioni malariche deve poter funzionare per un numero di ore illimitato. È questo un primo ammaestramento di ordine tecnico da servire come guida alle future applicazioni. Ma da siffatto spiacevole incidente sorgevano considerazioni di più grande valore. Dai precedenti esperimenti avevo tratto questa conclusione: che « *la regolarità delle sedute, l'ora stessa delle radiazioni hanno una grande influenza sul maggiore o minor successo della nuova cura fisica da me proposta* ». Avevo, è vero, dichiarato che « *la malaria cronica, come tollera dosi maggiori di raggi della malaria acuta radiosensibilissima, così sopporta anche oscillazioni assai larghe nel tempo* ». Ma le irregolarità impreviste e frequenti, la sospensione prolungata del trattamento, ebbi timore potessero influire sfavorevolmente determinando arresto e turbamento, forse irreparabile, delle guarigioni iniziate.

Dell'imprevisto ostacolo la radioterapia ha potuto invece trionfare. Il miglioramento iniziato non si arrestò nè retrocesse in alcuno degli ammalati. Nessuno di questi, in un mese circa di forzato riposo, fu preso da accessi febbrili. Poteva dunque trarsi questa logica conseguenza: che la radioterapia della malaria cronica non esige evidentemente quella rigida successione di sedute che sarebbe spesso inconciliabile, nella bonifica di intere popolazioni, con le varie attitudini e le diverse occupazioni dell'infermo.

*Primi risultati ottenuti.* — Il carattere sommario di questo rapporto preliminare dispensa da un esame minuzioso dei risultati ottenuti finora. Dirò qui brevemente che, in tutti i primi 100 malati trattati, senza eccezione, il tumore di milza si è gradualmente ridotto fino a scomparire. Come ho già rilevato altra volta, nessun tumore splenico resiste, se trattato con opportuna tecnica, all'azione dell'energia radiante; nemmeno le milze maggiori che si spingono sino al bacino.

Per ben valutare l'importanza di questo primo successo, è necessario di considerare quale valore abbia la milza sull'ematopoiesi, sui poteri immunitarii dell'organismo, nella funzione digestiva, sullo sviluppo infine dell'individuo. La malaria cronica, con l'anemia profonda, col decadimento caratteristico di ogni sana attività fisica, intellettuale e morale, con l'infantilismo e con la cachessia che determina, è legata indissolubilmente alla presenza del tumore di milza. E la chirurgia ha dimostrato appunto che l'estirpazione di questi grandi tumori nei malarici cronici determina per sè un rifiorire rapido e mirabile delle condizioni di salute dell'infermo.

Alla diminuzione del tumore di milza seguì di pari passo un risveglio vivace, talvolta violento e meraviglioso, dell'attività formatrice del sangue. Il risveglio dell'ematopoiesi è un fatto costante come la riduzione della milza. All'anemia profonda dei malarici cronici succede un'irrorazione rapida della cute, la quale perde il suo caratteristico color terreo. Le donne ed i bambini sembrano ubbidire più rapidamente al violento stimolo dei raggi X. Tali modificazioni sono confermate dall'esame del sangue, il quale rivela una rapida curva ascendente dei globuli rossi. Ho veduto in qualche caso il numero degli eritrociti salire da 1,500,000 a 4,000,000 nel breve spazio di due settimane.

Il fosco quadro della malaria cronica si dissolve così sotto l'azione dell'energia radiante, mentre l'infermo è preso da un vero senso di euforia, esponente delle sue migliorate condizioni generali.

*Influenza sul ciclo febbrile.* — Come queste modificate condizioni generali, come il risveglio dell'attività formatrice del sangue, e la *restitutio ad integrum* della milza, organo strettamente legato alle funzioni difensive dell'organismo, possano influire beneficamente sul ciclo febbrile, si comprende facilmente. E più si comprende quando si consideri come la malaria, e specialmente la malaria cronica, sia sensibile, nelle sue manifestazioni febbrili, alle influenze della vita esteriore, alle modificate condizioni di alimentazione, di lavoro e a tutte quelle cause infine che modificano i poteri di resistenza e di difesa dell'organismo.

Questa nuova serie di esperimenti ha confermato l'influenza dei raggi X sulla curava termica della malaria. Le osservazioni da me in precedenza pubblicate hanno avuto una piena conferma. Mi è stato possibile infatti di riconoscere esattamente i principi già enunciati: che *le alte dosi di raggi rendono più gravi ed acutizzano le forme febbrili*; che *le piccole dosi tendono invece a spegnere o troncano le manifestazioni termiche dell'infezione*; infine che *la quantità di energia tollerata è tanto maggiore quanto più distanti sono le applicazioai dall'accesso febbrile, ed è massima per conseguenza nelle forme croniche ad accessi a lunghi intervalli.*

Tutti gli ammalati, anche quelli irradiati in un periodo acuto (operai, pescatori, contadini immigrati a Fiumicino), sono oggi e da parecchio tempo in completa apiressia.

### Nota aggiuntiva del Socio prof. B. Grassi.

Resta indiscutibilmente assodato che nei postumi della malaria e, come altri direbbe, nella malaria cronica o cachessia malarica (anemia profonda, milza più o meno voluminosa, debolezza generale, ecc., sintomi che spesso rendono gli individui inetti alle fatiche, ancorchè non più febbricitino), i



raggi X, usati opportunamente (metodo Pais), esplicano un'azione risanatrice, molto rapida, spiccatissima, come dice il volgo, meravigliosa.

Siffatti risultati non sono conseguibili con i metodi finora adottati (cure continuate di chinino arsenico e ferro, cura climatica, buona nutrizione), se non dopo lungo tempo e non sempre completamente (ad esempio, nei casi con grave tumore di milza).

Col chinino coadiuvato dall'arsenico e dal ferro si possono, almeno a lungo andare, allontanare, sino a far scomparire, gli accessi febbrili. Anche a me sembra che l'azione di questi farmaci possa essere potentemente coadiuvata dai raggi X; e specialmente nei casi più ribelli, ove l'energia radiante sembra accelerare la guarigione, come dimostrano le esperienze del Pais a Venezia.

Comunque, i casi, in cui i raggi X riescono indiscutibilmente efficaci, sono numerosissimi in qualunque luogo malarico, e perciò la radioterapia dovrebbe entrare sin da ora come pratica ordinaria nella lotta contro la malaria.

*Fisiologia. — Ricerche sulla secrezione spermatica: X. L'eliminazione dello sperma nella cavia e nel ratto* <sup>(1)</sup>. Nota del dott. G. AMANTEA, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Per le ricerche sulla secrezione spermatica col metodo della vagina artificiale, il cane va considerato come « animale di scelta » <sup>(2)</sup>. Tuttavia, per lo studio di vari problemi speciali, ho rilevato che la soluzione di alcuni di essi, sperimentando sul cane, non si sarebbe nemmeno potuta tentare; mentre invece si sarebbero prestati allo scopo altri animali. Così per la funzione delle vescichette seminali, essendone il cane affatto privo, ed essendo esse invece molto sviluppate nei roditori, a questi particolarmente ho pensato di estendere le osservazioni.

Ho dapprima tentato di utilizzare i ratti albin, ma con scarso successo; quindi le cavie, con pieno successo per quanto mi ero proposto. I tentativi iniziali e le osservazioni eseguite dopo, col metodo perfezionato sulle cavie, mi hanno insieme permesso di raccogliere un complesso di dati, che ritengo utile esporre nella presente Nota e nelle successive.

Per verificare anzitutto come si comportasse, nel ratto e nella cavia, l'eliminazione di spermatozoi, mi proposi di seguire un metodo semplice:

<sup>(1)</sup> Ricerche eseguite nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Roma.

<sup>(2)</sup> G. Amantea, « Rendiconti della R. Accad. dei Lincei », vol. XXIII, ser. 5<sup>a</sup>, 1<sup>o</sup> sem., 1914; vol. XXIV, ser. 5<sup>a</sup>, 2<sup>o</sup> sem. 1915; vol. XXVIII, ser. 5<sup>a</sup>, 1<sup>o</sup> sem. 1919; vol. XXVIII, ser. 5<sup>a</sup>, 2<sup>o</sup> sem. 1919.

sacrificare, subito dopo l'accoppiamento, la femmina, e riprendere dalle vie genitali tutto l'eiaculato, lavando con cura e contando poscia nel liquido di lavaggio gli spermatozoi.

Il fatto bene accertato <sup>(1)</sup> che il contenuto delle vescichette seminali, mescolandosi col secreto prostatico, tanto nel ratto quanto nella cavia, coagula formando il cosiddetto « tappo vaginale », destinato a impedire, come sembra verosimile, il refluxo del resto dello sperma, assicurava esattezza ai miei risultati, ma poteva far pensare che una parte degli spermatozoi, rimanendo inglobata nel coagulo, sarebbe potuta sfuggire alla numerazione, costringendo a errori in meno. Altri inconvenienti erano rappresentati dall'inevitabile sciupio di animali, dal non potere agevolmente variare le condizioni di esperimento ecc.

Comunque, le ricerche eseguite con questo metodo mi condussero ad accertare alcuni interessanti particolari relativi alla maniera come avviene l'accoppiamento e la fecondazione nel ratto e nella cavia.

Rilevai che nello sperma di questi piccoli roditori si possono distinguere due porzioni: una, la prima ad essere eiaculata, costituita da poche gocce di liquido lattiginoso, piuttosto fluido, la quale nel coito viene quasi iniettata direttamente nell'utero; e una seconda molto densa, quasi gelatinosa, che è la sola destinata a formare il « tappo vaginale », e forse a impedire così il refluxo della prima dall'utero. La prima è pure quella che porta gli spermatozoi mobilissimi, e rappresenta tutto ciò che proviene dagli epididimi, dai deferenti, e solo in parte anche dal secreto delle glandole accessorie (prostata, glandole uretrali ecc.); l'altra invece è essenzialmente costituita dal contenuto delle vescichette seminali, che, svuotandosi in secondo tempo, mescolano il loro prodotto con una parte del secreto prostatico, il quale porta il fermento (*vesiculasi* di Camus e Gley) destinato a determinarne la coagulazione. Questa avviene nel grado necessario solo quando la detta mescolanza è intima e omogenea, come nel graduale passaggio del contenuto delle vescichette durante la contemporanea secrezione prostatica: portando difatti semplicemente a contatto, *in vitro*, il primo col succo spremuto dalla prostata, la coagulazione si limita alla superficie di contatto e non è mai completa, come avviene invece se si fa una mescolanza più intima. Lo stesso si verifica anche usando, invece del succo prostatico, la prima porzione dell'eiaculato tratto dall'utero.

Ho potuto ancora stabilire, coll'osservazione microscopica diretta di sottili sezioni seriali di coaguli vaginali, che in esso resta inglobato solo un numero di spermatozoi relativamente esiguo, così da costituire una causa di

(1) Leuckart, « Wagner's Handb. f. Physiol. », 4, 900, 1853. Camus et Gley, « Compt. rendus Acad. Sc. », 123, pag. 194; « Compt. rendus Soc. Biol. », 1897.

errore trascurabile nelle ricerche che mi ero proposto di eseguire. Quest'ultimo fatto permette di utilizzare i dati che risultano dalle osservazioni seguenti.

OSSERVAZIONE I. - 2 aprile 1915. — Ratto bianco ♀, in fregola, si accoppia con un maschio adulto; dopo il primo coito, si asporta il tappo vaginale, si riprende con batuffolini di ovatta tutto il liquido che si trova in vagina, e si aspetta che avvenga un secondo coito, dopo il quale si toglie ancora il tappo vaginale, si riprende il liquido vaginale, e si fa accoppiare la femmina per una terza volta con un secondo maschio in riposo sessuale da più giorni. Quindi si sacrifica la femmina, e si escidono interi, senza interrompere i rapporti, utero e vagina. Aperta la vagina, si trova che l'ultimo tappo ne riempie tutta la metà più interna, chiudendo a perfetta tenuta l'imbocco uterino. I due corni uterini si presentano ripieni di un liquido, che non arriva però a tenderne le pareti. Tolto il coagulo vaginale, dall'utero non fuoriesce spontaneamente il liquido. Incidendo però uno dei corni, ne fluiscono 3-4 gocce: è lattescente, filante, e al microscopio si rivela ricchissimo di spermatozoi mobilissimi. Si lavano più volte utero e vagina, mescolando il liquido di lavaggio col rimanente sperma fluito dall'utero. Vi si contano in tutto al *Thoma-Zeiss* 35.000.000 di spermatozoi.

OSSERVAZIONE II. - 12 luglio 1919. — Cavia ♀, in fregola. Accoppiamento con maschio adulto in riposo sessuale sicuramente da oltre 15 giorni. Dopo il primo coito, separo dal maschio la femmina, che sacrifico 5 ore dopo. Un grosso tappo vaginale riempie quasi tutta la vagina; l'utero contiene alcune gocce di sperma fluido e incoagulabile, ricco di spermatozoi. Col lavaggio della vagina e dell'utero, riesco a riprendere in tutto 50.400.000 di spermatozoi.

OSSERVAZIONE III. - 7 agosto 1919. — Cavia ♀, in fregola. Accoppiamento collo stesso maschio dell'osservazione precedente, in riposo sessuale da tre settimane. Subito dopo il primo coito, sacrifico la femmina. Tappo vaginale. Utero contenente sperma fluido. Numero totale degli spermatozoi ottenuti col lavaggio dell'utero e della vagina: 57.140.000.

OSSERVAZIONE IV. - 19 agosto 1919. — Ratto ♀, in fregola. Si sacrifica dopo il primo accoppiamento con un maschio ancora giovane, che non ha finora avuto altri rapporti sessuali. Tappo vaginale assai piccolo. Nell'utero, scarsissimo liquido. Si riprendono in tutto così pochi spermatozoi da non potersi contare al *Thoma-Zeiss*.

OSSERVAZIONE V. - 20 agosto 1919. — Ratto ♀, in fregola. Si accoppia collo stesso maschio giovane dell'osservazione precedente. Dopo due coiti successivi, si sacrifica la femmina. In vagina tappo piccolo. Spermatozoi totali ripresi col lavaggio dell'utero e della vagina: 520.000.

OSSERVAZIONE VI. - 12 settembre 1919. — Cavia ♀, in fregola. Accoppiamento con maschio adulto e in riposo sessuale da 4 giorni. Si sacrifica la femmina dopo il primo coito. Si trova tappo vaginale; utero contenente sperma fluido. Spermatozoi ripresi col lavaggio dell'utero e della vagina in tutto 87.500.000.

Le riferite osservazioni e altre accessorie analoghe, servirono a farmi apprezzare anche i vantaggi che la cavia presenta sul ratto per tale genere di ricerche; e mi fecero sperare di potere estendere appunto alla cavia, con buoni risultati, il metodo della vagina artificiale.

Prima di riuscire occorre uno studio sistematico minuto delle abitudini degli animali, delle condizioni più adatte all'eccitamento sessuale dei maschi, nonchè di quelle che più facilmente agiscono inibendole. Tenendo varie coppie



di cavie in lunga osservazione, nella mia stessa camera di lavoro; alimentandole e curandole sempre io stesso; prendendole spesso fra le mani, ecc., riuscii a rendermi ad esse familiare, e a vincere la loro timidezza abituale, limitando così il principale fattore di inibizione.

L'eccitamento sessuale più completo nel maschio si verifica soltanto in presenza della femmina in fregola, o che abbia partorito da poche ore (altro periodo opportuno per l'accoppiamento); in entrambi i casi il maschio si eccita fiutando i genitali della femmina, ma forse più ancora quando si accorge che essa cede ai suoi primi tentativi di coito. La femmina stessa talora contribuisce attivamente ad accrescere l'orgasmo del maschio, accarezzandolo, cacciandogli la testa fra gli arti anteriori o sotto l'addome, in modo da strofinare contro il petto o contro i fianchi.

Quando si trattò di provare il metodo della vagina artificiale, questi semplici rilievi mi divennero preziosi. Costruii una piccola vagina artificiale, semplicissima, valendomi di un tubo di gomma della lunghezza di 5 cm. e del diametro di 8-9 mm., attraverso il quale passai un tratto di un comune *condom* di poco più lungo, in modo che ne sporgesse alquanto da un lato il serbatoio, mentre l'estremità aperta veniva rovesciata sull'altro orlo del tubo, e su questo legata, o fissata con un piccolo anello elastico o metallico.

Sono riuscito a ottenere l'eiaculazione in questa piccola vagina artificiale da parecchi maschi, profittando le prime volte di una femmina in fregola per eccitarli, ma in seguito anche servendomi di femmine in riposo sessuale. Reggendo colla mano sinistra la femmina pel collo, sopra un tavolino, e mantenendo colla destra applicata la vagina artificiale sotto l'addome di essa, in modo che l'apertura dell'apparecchio rimanesse subito al disotto della vulva, ho potuto raggiungere lo scopo, evitando qualsiasi penetrazione del pene nelle vie naturali.

Per destare l'orgasmo nel maschio, ho trovato utile il titillamento, con un dito, della cute del petto, e più di quella dei fianchi e degli inguini (*zone erogene*).

Anche nella vagina artificiale l'eiaculato rimane distinto in una porzione (poche gocce) fluida, lattescente, ricchissima di spermatozoi, e in un'altra gelatinosa, che viene eliminata dopo la precedente, colla quale non si mescola, e che presto si rapprende in un coagulo bianco-opaco, duro-elastico, nel quale restano inglobati relativamente pochi spermatozoi. Lavando il sacchetto collettore e il coagulo, è possibile pertanto riprendere tutti gli spermatozoi eliminati, eccettuato il piccolo numero rimasto nel coagulo stesso. I primi possono essere numerati al *Thoma-Zeiss*, col metodo descritto pel cane e per l'uomo, e con trascurabile errore in meno.

Nello specchio seguente sono riportate le cifre trovate per gli spermatozoi totali di nove eiaculazioni, ottenute in vagina artificiale da nove maschi diversi, in varie condizioni di riposo sessuale.

Numero d'ordine	Peso dell'animale in grammi	Riposo sessuale precedente	Spermatozoi totali eliminati
I	760	31 giorni	288.660.000
II	500	14 "	78.570.000
III giovaniss.	280	prima ejaculaz.	assenti
IV	552	6 giorni	96.350.000
V	446	3 ore	165.900
VI	444	12 giorni	272.080.000
VII	620	23 ore	27.840.000
VIII	615	3 giorni	19.272.000
IX giovane	495	prima ejaculaz.	2.660.000

a) È possibile studiare l'eliminazione di spermatozoi nel ratto e nella cavia sacrificando la femmina dopo il coito e riprendendo gli spermatozoi dalle vie genitali.

b) Nella cavia più vantaggioso è il metodo della vagina artificiale.

c) Con entrambi i metodi è possibile differenziare nell'ejaculato del ratto e della cavia due distinte porzioni, che si eliminano in tempi successivi: quella che si elimina in primo tempo è rappresentata da alcune gocce di liquido lattescente filante, contiene numerosi spermatozoi mobilissimi, si conserva fluida, e nell'accoppiamento normale viene quasi iniettata direttamente nell'utero; quella che si elimina in secondo tempo è rappresentata da una massa gelatinosa dapprima, è più abbondante della precedente, e si rapprende poi in un coagulo bianco-opaco, duro-elastico, il quale trattiene inglobato un numero relativamente esiguo di spermatozoi e riempie in parte o per intero la vagina, chiudendo a tenuta perfetta l'orifizio uterino. La prima porzione proviene soprattutto dagli epididimi e dalla prostata; l'altra invece è costituita specialmente dal contenuto delle vescichette seminali, e in parte minore da secreto della prostata e delle altre ghiandole accessorie.

d) Le cifre trovate per gli spermatozoi eliminati con ciascuna ejaculazione dalla cavia risultano sensibilmente più basse — a parità di riposo sessuale — che quelle trovate pel cane, e più basse ancora che quelle trovate per l'uomo. Sembra pertanto esistere un rapporto inverso colla taglia dell'animale.

## RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio CASTELNUOVO, a nome anche del Socio ENRIQUES, relatore, legge una relazione colla quale si propone la inserzione, negli Atti accademici, di una Memoria del prof. CHISINI avente per titolo: *La risoluzione delle singolarità di una superficie mediante trasformazioni birazionali dello spazio.*

La proposta della Commissione esaminatrice è approvata dalla Classe, salvo le consuete riserve.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente RÖRTI annuncia che alla seduta assiste il Socio straniero prof. MITTAG-LEFFLER cui porge il saluto dei Colleghi. Dà poscia la dolorosa notizia della morte del Socio straniero prof. TEODORO REYE, mancato ai vivi il 2 luglio 1919; apparteneva il defunto all'Accademia, per la *Matematica*, sino dal 23 agosto 1897.

Il Socio CASTELNUOVO pronuncia alcune parole per la morte di questo illustre matematico e si riserba di farne la commemorazione insieme con quella di altri due Soci stranieri di cui l'Accademia lamenta la recente perdita, lo ZEUTHEN e l'HURWITZ, in una delle prossime sedute.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario CASTELNUOVO presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando fra queste un trattato in due volumi sulla *Teoria delle curve piane*, del prof. SURENDRAMON GANGULI della Università di Calcutta, e alcuni altri volumi contenenti le *Conferenze* fatte a Boston, a Princeton e a Madison, per iniziativa delle Società matematiche di queste città.

Il Socio LEVI-CIVITA fa omaggio, a nome dei rispettivi autori, di due pubblicazioni, una del Corrisp. C. GUIDI, e l'altra del prof. M. PANETTI, dandone la seguente notizia:

Il collega CAMILLO GUIDI si proponeva di intervenire alla odierna seduta e di presentare un suo opuscolo a stampa *sul calcolo statico delle dighe*. Debbo scusarne l'assenza e presentare a suo nome il lavoro. In questo si tien conto dell'eventualità che la muratura di una diga non sia a tenuta perfetta. Possono allora avvenire infiltrazioni dal paramento bagnato a monte, sì da rendere sensibile una sottospinta comparabile con la pressione idro-



statica alla base del paramento stesso. Il nostro collega stabilisce le norme di sicurezza per simili dighe e le conseguenti limitazioni per l'altezza massima dei serbatoi cui esse sono destinate.

Ho altresì l'incarico, da parte del prof. PANETTI del politecnico di Torino, di fare omaggio di una sua monografia sul laboratorio di aerodinamica creato e diretto da lui presso quel politecnico.

Un primo impianto sperimentale per studi di aerodinamica fu ivi istituito fin dal 1913, ma era allora limitato alla prova dei motori. Dall'agosto 1918 funziona, in apposito attiguo padiglione, anche la sezione destinata a veri e propri esperimenti di aerodinamica.

L'A., passando in silenzio le sue, ricorda le benemeritenze dei suoi collaboratori nell'ideazione e nell'esecuzione del progetto, e gli aiuti ragguardevoli forniti da alcune ditte industriali. Descrive poi le principali caratteristiche della galleria in cui si fa muovere l'aria a diversa velocità, tenendo in presenza di essa i modelli degli aerei fissati ad una bilancia per la misura delle forze. La galleria consta di tre sezioni, una centrale cilindrica destinata alle prove, e due laterali che fungono rispettivamente da aspiratore e da diffusore: in quest'ultima sta il ventilatore elicoidale che è molto simile a quello dell'istituto centrale di Roma.

Segue una interessante illustrazione teorica e pratica della così detta bilancia universale a tre fulcri per la misura delle forze, con indicazione degli speciali accorgimenti costruttivi che hanno consentito di renderne comodo e spedito il maneggio, pur assicurando precisione e sensibilità.

Infine rende conto delle più importanti serie di esperienze già eseguite.

Sono state determinate la portanza, la resistenza diretta e anche le azioni deviatrici per modelli interi di aeroplani e loro organi essenziali; la resistenza al moto di automobili da corsa su carrozzerie diverse; vennero campionati indicatori di velocità per uso di aviazione.

Altre importanti questioni (per es. il comportamento dei proietti ogivali e il fenomeno di Magnus) sono attualmente allo studio, o in programma (come il funzionamento dei motori a pressione atmosferica ridotta), mentre continua, si può dire giornalmente, l'opera di perfezionamento degli strumenti e dell'impianto.

Mi sono permesso di indicare rapidissimamente il contenuto della monografia del prof. Panetti perchè concerne una istituzione scientifico-tecnica cui non può mancare tutta la simpatia della nostra Accademia. Il laboratorio ha già dato risultati notevoli, grazie all'iniziativa intelligente e alle cure del prof. Panetti. Esso presenta anche per gli studiosi serio interesse e garanzia che vi si terrà sempre in onore lo spirito di ricerca.

## COMUNICAZIONI VARIE

IL PRESIDENTE dà comunicazione di una lettera dell'on. Ministro della Pubblica Istruzione, lettera colla quale si assicura l'Accademia, in risposta al voto emesso dalle due Classi dell'Accademia stessa, che venne già provveduto, per cura del Ministero, a prendere vincolo sulla villa di Arcetri, dove visse e morì Galileo, per il caso che si proceda alla vendita di quel monumento.

G. C.

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 2 maggio 1920.*

- CAUDA C. — Gruppi vegetali fissatori di azoto libero. Il microrganismo delle crocifere. *Bacillus cruciferae* (A.C.) (Estr. dal « Nuovo Giornale botanico italiano », vol. XXVI, pp. 169-177). Asti, 1919. 8°.
- DEHAUT E. G. — Contributions à l'étude de la vie vertébrée insulaire dans la région méditerranéenne occidentale et particulièrement en Sardaigne et en Corse. Paris, 1920. 8°, pp. 1-95.
- DE TONI G. B. — Commemorazione dei Soci defunti G. Briosi e P. Baccarini (Estr. dal « Bollettino della Società botanica italiana », pp. 59-62). s. l., 1920. 8°.
- DE TONI G. B. — Spigolature Aldrovandiane XVI. Intorno alcune lettere di Ulisse Aldrovandi esistenti in Modena (Estr. dagli « Atti e Memorie della R. Deputazione di storia patria per le provincie modenesi », vol. XIII). Modena, 1920. 8°, pp. 1-10.
- GANGULI S. — Lectures on the theory of plane curves, part I, II. Calcutta, 1919. 8°, pp. i-x, 1-138; i-xiii, 1-350.
- MASCART J. — La recherche des documents météorologiques. Lyon, s. d., 8°, pp. 1-27.
- PAOLI G. — Un apparecchio per la preparazione della crusca avvelenata per la lotta contro le cavallette (Estr. da « L'agricoltura coloniale », anno XIII). Firenze, 1920. 8°, pp. 1-9.
- The Boston Colloquium (Lectures on Mathematics). New York, 1905. 8°, pp. i-xii, 1-187.
- The Madison Colloquium (American Mathematical Society, vol. IV). New York, 1914. 8°, pp. 1-230.
- The Princeton Colloquium (Lectures on Mathematics). New York, 1913. 8°, pp. 1-117.
- TREVISANI D. — La trisezione dell'angolo. Monopoli, 1920. 8°, pp. 1-11.

Il Parlamento ha approvato la legge di riforma della giustizia, che prevede la creazione di nuovi tribunali e la riforma della procedura civile e penale.

La legge di riforma della giustizia è stata approvata dal Parlamento con la maggioranza assoluta dei voti. La legge prevede la creazione di nuovi tribunali e la riforma della procedura civile e penale.

La legge di riforma della giustizia è stata approvata dal Parlamento con la maggioranza assoluta dei voti. La legge prevede la creazione di nuovi tribunali e la riforma della procedura civile e penale.

La legge di riforma della giustizia è stata approvata dal Parlamento con la maggioranza assoluta dei voti. La legge prevede la creazione di nuovi tribunali e la riforma della procedura civile e penale.

La legge di riforma della giustizia è stata approvata dal Parlamento con la maggioranza assoluta dei voti. La legge prevede la creazione di nuovi tribunali e la riforma della procedura civile e penale.

La legge di riforma della giustizia è stata approvata dal Parlamento con la maggioranza assoluta dei voti. La legge prevede la creazione di nuovi tribunali e la riforma della procedura civile e penale.

La legge di riforma della giustizia è stata approvata dal Parlamento con la maggioranza assoluta dei voti. La legge prevede la creazione di nuovi tribunali e la riforma della procedura civile e penale.

La legge di riforma della giustizia è stata approvata dal Parlamento con la maggioranza assoluta dei voti. La legge prevede la creazione di nuovi tribunali e la riforma della procedura civile e penale.

La legge di riforma della giustizia è stata approvata dal Parlamento con la maggioranza assoluta dei voti. La legge prevede la creazione di nuovi tribunali e la riforma della procedura civile e penale.

La legge di riforma della giustizia è stata approvata dal Parlamento con la maggioranza assoluta dei voti. La legge prevede la creazione di nuovi tribunali e la riforma della procedura civile e penale.

La legge di riforma della giustizia è stata approvata dal Parlamento con la maggioranza assoluta dei voti. La legge prevede la creazione di nuovi tribunali e la riforma della procedura civile e penale.

La legge di riforma della giustizia è stata approvata dal Parlamento con la maggioranza assoluta dei voti. La legge prevede la creazione di nuovi tribunali e la riforma della procedura civile e penale.